12. PRZESTRZEŃ FRAKTALI ($H(X)$, h).

W rozdziale tym podano konstrukcje przestrzeni metrycznej ($H(X)$, h) zwartych, niepustych podzbiorów przestrzeni metrycznej (X, d), oraz jej najwazniejsze wlasnosci. Do przestrzeni tej naleza *fraktale deterministyczne*.

DEFINICJA 12.A. Niech (X, d) bedzie zupelna przestrzenia metryczna. W przestrzeni tej wyrózniamy *zbiór wszystkich niepustych i zwartych podzbiorów przestrzeni X* i oznaczamy go symbolem $H(X)$.

Aby $H(X)$ nabral struktury przestrzeni metrycznej, nalezy w nim wprowadzic funkcje mierzaca odleglosc miedzy zbiorami zwartymi, czyli metryke. Metryka w przestrzeni $H(X)$ konstruowana jest w trzech krokach. Po pierwsze, definiujemy odleglosc od punktu do zbioru.

DEFINICJA 12.B Niech (X, d) bedzie zupelna przestrzenia metryczna. *Odlegloscia* punktu $x\in X$ od zbioru $B\in H(X)$ nazywamy wyrazenie

$$d(x, B) = Inf\{d(x, y): y\in B\}.$$

Z twierdzenia 11.16 wynika, ze istnieje taki punkt $b\in B$, ze $d(x, B) = d(x, b)$

DEFINICJA 12.C Niech (X, d) bedzie zupelna przestrzenia metryczna. Niech $A, B\in H(X)$. *Odlegloscia zbioru* $A\in H(X)$ *od zbioru* $B\in H(X)$ nazywamy wyrazenie

$$d(A, B) = Sup\{d(x, B): x\in A\}.$$

Analogicznie z twierdzenia 11.16 wynika istnienie punktów $a\in A$ i $b\in B$ takich, ze $d(A, B) = d(a, b)$.

Okazuje sie, ze w ogólnosci $d(A, B) \neq d(B, A)$. Dlatego wprowadza sie nastepujaca definicje *metryki Hausdorffa* w zbiorze $H(X)$:

Definicja 12.D. Niech (X, d) bedzie zupelna przestrzenia metryczna. *Metryka Hausdorffa* w zbiorze $H(X)$ nazywamy wyrazenie

$$h(A, B) = Max\{d(A, B), d(B, A)\}$$

Zbiór $H(X)$ wraz z metryka Hausdorffa h tworza przestrzen metryczna ($H(X)$, h).

TWIERDZENIE 12.A *h jest metryka na przestrzeni $H(X)$.*

Dowód.

Niech $A, B, C\in H(X)$. Wtedy:

$$h(A, A) = Max\ \{d(A, A), d(A, A)\}$$

$$= d(A, A) = Max\{d(x, A): x \in A\} = 0.$$

$h(A, B) = d(a, b)$ dla pewnych $a\in A$ i $b\in B$. Stad $0 \leq h(A, B) < \infty$.

Dla udowodnienia nierówności trójkata pokazuje sie najpierw, ze:

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B).$$

Dla kazdego $a\in A$ i $c\in C$ mamy: A

$$d(a, B) = Min\{d(a, b): b\in B\}\leq$$

$$Min\{d(a, c) + d(c, b): b\in B\}=$$

$$d(a, c) + Min\{d(c, b): b\in B\}$$

stad mamy, ze:

$$d(a, B) \leq Min\{d(a, c): c \in C\} +$$

$$Max\{Min\{d(c, b): b \in B\}: c\in C\} =$$

$$d(a, C) + d(C, B),$$

wiec:

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$$

Podobnie pokazuje sie, ze:

$$d(B, A) \leq d(B, C) + d(C, A)$$

stad:

$$h(A, B) = Max\{d(A, B), d(B, A)]\}\leq$$

$$Max\{d(B, C), d(C, B)\} +$$

$$Max\{d(A, C), d(C, A)\} =$$
$$h(B, C) + h(A, C)$$

cbdo.

Podstawowa wlasnoscia przestrzeni $(H(X), h)$ jest zupelnosc. Wprowadzmy kilka pojec i twierdzen pomocniczych.

DEFINICJA 12.E Niech $S \subset X$ i $\varepsilon > 0$. Wtedy $S + \varepsilon = \{y \in X: d(x, y) \leq \varepsilon$ dla pewnego $x \in S\}$.

LEMAT 1. *Niech* (X, d) *bedzie przestrzenia metryczna i niech* $A, B \in H(X)$. *Niech* $\varepsilon > 0$. *Wtedy*

$h(A, B) \leq \varepsilon \Leftrightarrow, A \subset B + \varepsilon$ *i* $B \subset A + \varepsilon$

Dowód.W dowodzie pokazuje sie, ze $d(A, B) \leq \varepsilon \Leftrightarrow A \subset B+\varepsilon$. Niech wiec $d(A, B) \leq \varepsilon$. Wtedy $d(a, B) \leq \varepsilon$ dla wszystkich $a \in A$. Stad $a \in B+\varepsilon$ i $A \subset B+\varepsilon$. Niech $A \subset B+\varepsilon$ i $a \in A$. Wtedy $a \in B+\varepsilon$ i istnieje $b \in B$ taki, ze $d(a, b) \leq \varepsilon$. Stad $d(a, B) \leq \varepsilon$. Rozwazania powyzsze prowadzono dla kazdego $a \in A$, wiec $d(A, B) \leq \varepsilon$. Analogicznie dowodzi sie, ze $d(B, A) \leq \varepsilon \Leftrightarrow B \subset A+\varepsilon$, co konczy dowód.

LEMAT 2. *Niech* (X, d) *bedzie przestrzenia metryczna i* $\{A_n: n = 1, 2, ..., \infty\}$ *bedzie ciagiem Cauchy'ego punktów w przestrzeni* $(H(X), h)$. *Niech* $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ *bedzie ciagiem liczb calkowitych*

$$0 < n_1 < n < ... .$$

Niech dany bedzie ciag Cauchy'ego $\{x_n \in A_n: j = 1, 2, 3, ...\}$ *w przestrzeni* (X, d). *Wtedy istnieje ciag Cauchy'ego* $\{\tilde{x}_n \in A_n: n = 1, 2, ...\}$ *taki, ze* $\tilde{x}_n = x_n$ *dla* $j = 1, 2, 3, ...$

Dowód. W dowodzie konstruuje sie zadany ciag i pokazuje, ze jest on ciagiem Cauchy'ego.
Dla kazdego $n \in \{1,2, ..., n_1\}$ wybieramy $\tilde{x}_n \in \{x \in A_n: d(x, x_n) = d(x_n, A_n)\}$. Istnienie takiego punktu wynika ze zwartosci A_n. Analogicznie dla kazdego $j \in \{2, 3, ...\}$ i kazdego $n \in \{n_{j+1}, ..., n_{j+1}\}$ wybieramy $\tilde{x}_n \in \{x \in A_n: d(x, x_n) = d(x_n, A_n)\}$.

Z konstrukcji wynika, ze $\tilde{x}_n = x_n$ i $x_n \in A_n$. Dla dowodu, i jest to ciag Cauchyego wezmy dowolny $\varepsilon > 0$. Nierównosc trójkata daje:

$$d(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) \leq$$
$$d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \tilde{x}_n)$$

gdzie $m \in \{n_{j-1+1}, ..., n_{j+1}\}$ i $n \in \{n_{k-1}, ..., n_{k+1}\}$ Poniewaz A_n jest ciagiem Cauchy'ego wiec istnieje N_1 takie, ze dla $m, n_j > N_1$ mamy:

$$h(A_m, A_{n_j}) \leq \varepsilon/3$$

Stad:

$$d(A_{n_j}, A_m) \leq \varepsilon/3 \text{ i } d(x_{n_j}, A_m) \leq \varepsilon/3 .$$

Zgodnie z konstrukcja naszego ciagu

$$\mathrm{d}(\tilde{x}_m, x_{n_j}) = d(x_{n_j}, A_m) \leq \varepsilon/3.$$

Analogicznie pokazuje sie, ze:

$$d(x_{n_k}, \tilde{x}_n) \leq \varepsilon/3$$

dla odpowiednio duzych n_k i n. Podobnie

$$d(x_{n_j}, x_{n_k}) \leq \varepsilon/3$$

poniewaz ciag $\{x_{n_j}\}$ jest z zalozenia ciagiem Cauchy'ego cbdo.

Przytoczone powyzej lematy pozwalaja udowdnic najwazniejsze twierdzenie tego rozdzialu.

TWIERDZENIE 12.B *Niech* (X, d) *bedzie zupelna przestrzenia metryczna. Wtedy* $(H(X), h)$ *jest zupelna przestrzenia metryczna. Ponadto, jesli* $\{A_n$ Î $H(X)\}$ *jest ciagiem Cauchy'ego to zbiór*

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n \in H(X)$$

moze byc okreslony w nastepujacy sposób:

$A = \{x \in X$: *istnieje ciag Cauchy'ego* $\{x_n \in A_n\}$, *który zbiega do* $x\}$.

Dowód. Niech $\{A_n\}$ bedzie ciagiem Cauchy'ego w $H(X)$ i niech zbiór A bedzie zdefiniowany jak w tezie twierdzenia. Dowód dzieli sie na kilka etapów:

a) $A \neq \emptyset$;

b) A jest domkniety i stad zupelny poniewaz X jest zupelny;

c) dla $\varepsilon > 0$ istnieje N takie, ze dla $n \geq N$, $A \subset A_n+\varepsilon$;

d) A jest calkowicie ograniczony i stad dzieki (b) jest zwarty;

e) $\lim A_n = A$

Dowód (a). Niech $\{A_n\}$ bedzie ciagiem Cauchy'ego w $H(X)$. Wtedy istnieja takie wskazniki $N_1, N_2, \ldots$, ze dla $m, n \geq N_i$ mamy:

$$h(A_m, A_n) < 1/2^i$$

wezmy dowolny $x_{N_1} \in A_{N_1}$. Poniewaz $h(A_{N_1}, A_{N_2}) < 1/2$ ($N_1 < N_2$) wiec równiez $d(A_{N_1}, A_{N_2}) < 1/2$ i $d(x_{N_1}, A_{N_2}) < 1/2$. Stad dla pewnego $x_{N_2} \in A_{N_2}$ zachodzi:

$$d(x_{N_1}, A_{N_2}) = d(x_{N_1}, x_{N_2}) < 1/2.$$

W ten sposób znajdujemy drugi element konstruowanego ciagu. Dalej wezmy A_{N_3}. Poniewaz $h(A_{N_2}, A_{N_3}) < 1/4$ ($N_2 < N_3$) wiec równiez $d(A_{N_2}, A_{N_3}) < 1/4$ i $d(x_{N_2}, A_{N_3}) < 1/4$. Stad dla pewnego $x_{N_3} \in A_{N_3}$ zachodzi:

$$d(x_{N_2}, A_{N_3}) = d(x_{N_2}, x_{N_3}) < 1/4.$$

x_{N_3} jest trzecim elementem konstruowanego ciagu. W analogiczny sposób znajdujemy nastepne wyrazy ciagu. W nastepnym kroku pokazuje sie, ze skonstruowany powyzej ciag jest ciagiem Cauchy'ego.

Niech $\varepsilon > 0$. Istnieje k calkowite takie, ze:

$$1/2^k + 1/2^{k+1} + \ldots < \varepsilon .$$

Dla $N_m, N_n \geq N_k$ mamy:

$$\begin{aligned} d(x_{N_m}, x_{N_n}) &\leq d(x_{N_m}, x_{N_{m+1}}) + \ldots \\ &+ d(x_{N_{n-1}}, x_{N_n}) < d(x_{N_k}, x_{N_{k+1}}) + \ldots \\ &+ d(x_{N_{m-2}}, x_{N_{m-1}}) + d(x_{N_m}, x_{N_{m+1}}) + \ldots \\ &+ d(x_{N_{n-1}}, x_{N_n}) + \ldots < \varepsilon . \end{aligned}$$

Skonstruowany ciag jest wiec ciagiem Cauchy'ego. Z lematu 2 wynika, ze otrzymany ciag mozna 'rozszerzyc' do ciagu Cauchy'ego $\{\tilde{x}_n\}$, $\tilde{x}_n \in A_n$ i $\tilde{x}_n = x_n$ dla $j = 1, 2, 3, \ldots$. Z zupelnosci przestrzeni X wynika, ze ciag $\{\tilde{x}_n\}$ jest zbiezny, czyli $A \neq \emptyset$. cbdo.

Dowód (b). Niech $\{a_i \in A\}$ bedzie ciagiem zbieznym do $a \in X$. W dowodzie pokazuje sie, ze $a \in A$. Dla kazdego calkowitego i istnieje ciag $\{x_{i,n} \in A_n\}$ zbiezny do a_i tzn. $\lim_{n\to\infty} x_{i,n} = a_i$. Ze zbieznosci $a_i \to a$ wynika, ze istnieje takie N_i, ze $d(a_{N_i}, a) \leq 1/i$. Ponadto, poniewaz a_{N_i} sa granicami pewnych ciagów Cauchy'ego wiec dla kazdego N_i istnieja calkowite m_i takie, ze $d(x_{N_i, m_i}, a_{N_i}) \leq 1/i$. Stad

$$d(x_{N_i, m_i}, a) \leq d(x_{N_i, m_i}, a_{N_i}) + d(a_{N_i}, a) \leq 2/i.$$

Kladac $x_{N_i, m_i} = y_{N_i}$ mamy $y_{N_i} \in A_{N_i}$ $\lim_{i\to\infty} y_{N_i} = a$. Z lematu 2 wynika, ze $\{y_{N_i}\}$ moze byc rozszerzony do $\{y_i \in A_i\}$ i $y_i \to a$. Stad $a \in A$. cbdo.

Dowód (c). Niech $\varepsilon > 0$. Poniewaz $\{A_n\}$ jest ciagiem Cauchy'ego wiec istnieje N takie, ze dla $m,n \geq N$, $h(A_n, A_m) \leq \varepsilon$. Wtedy (lemat 1) $A_m \subset A_n + \varepsilon$. Nalezy pokazac, ze $A \subset A_n + \varepsilon$ dla $n \geq N$. Niech $a \in A$. Istnieje ciag $\{a_i \in A_i\}$ zbiezny do a. Ponadto ze zwartosci A_n wynika domknietosc $A_n+\varepsilon$. Wtedy dla wszystkich $m \geq n \geq N$, $a_m \in A_n+\varepsilon$ (co wynika z $A_m \subset A_n+\varepsilon$) i równiez $a \in A_n+\varepsilon$ poniewaz $A_n+\varepsilon$ jest domkniety. cbdo.

Dowód (d). Dowód niewprost. Niech A nie bedzie calkowicie ograniczony. Wtedy dla pewnego $\varepsilon > 0$ nie istnieje ε-siatka i istnieje w A ciag $\{x_i\}$ taki, ze $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ dla $i \neq j$. Z (c), dla dostatecznie duzych n, $A \subset A_n+\varepsilon/3$. Dla kazdego x_i, istnieje odpowiadajacy mu $y_i \in A_n$ dla którego $d(x_i, y_i) \leq \varepsilon/3$. Poniewaz A_n jest zwarty wiec pewien podciag $\{y_{n_i}\}$ jest zbiezny i stad jest ciagiem Cauchy'ego. Istnieja wiec dwa punkty y_{n_i} i y_{n_j} dla których $d(y_{n_i}, y_{n_j}) \leq \varepsilon/3$. Wtedy

$$d(x_{n_i}, x_{n_j}) \leq$$
$$d(x_{n_i}, y_{n_i}) + d(y_{n_i}, y_{n_j}) + d(y_{n_j}, x_{n_j})$$
$$\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3$$

co jest sprzeczne ze sposobem wyboru $\{x_{n_i}\}$. A jest wiec calkowicie ograniczony i dzieki (b) zwarty.

***Dowód** (e).* Z czesci (d), $A \in H(X)$. Dzieki (c) i Lematowi 1 dowód czesci (e) bedzie kompletny, jesli pokaze sie, ze dla $\varepsilon>0$ istnieje N takie, ze dla $n \geq N$, $A_n \subset A+\varepsilon$. Niech $\varepsilon>0$. Istnieje N takie, ze dla $m, n \geq N$, $h(A_m, A_n) \leq \varepsilon/2$ i $A_m \subset A_n+\varepsilon/2$. Niech $n \geq N$ i $y \in A_n$. Istnieje rosnacy ciag $\{N_i\}$ liczb calkowitych taki, ze $n<N_1<N_2<...< N_k < ...$i dla $m, k \geq N_j$, $A_m \subset A_k + \varepsilon/2^{j+1}$. Ponadto $A_n \subset A_{N_1}+\varepsilon/2$. Poniewaz $y \in A_n$, istnieje $x_{N_1} \in A_{N_1}$ taki, ze $d(y, x_{N_1}) \leq \varepsilon/2$. Poniewaz $x_{N_1} \in A_{N_1}$, istnieje $x_{N_2} \in A_{N_2}$ taki, ze $d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \varepsilon/2^2$. W ten sposób znajdujemy ciag $x_{N_1}, x_{N_2}, ...$ taki, ze $x_{N_j} \in A_{N_j}$ i $d(x_{N_j}, x_{N_{j+1}}) \leq \varepsilon/2^{j+1}$. Stosujac kilkakrotnie nierównosc trójkata mamy

$$d(y, x_{N_j}) \leq \varepsilon \text{ dla wszystkich } j$$

i ponadto $\{x_{N_j}\}$ jest ciagiem Cauchy'ego. $\{x_{N_j}\}$ zbiega do $x \in A$ i $d(y, x_{N_j}) \leq \varepsilon$ implikuje, ze $d(y, x) \leq \varepsilon$. W ten sposób pokazano, ze $A_n \subset A+\varepsilon$ dla $n \geq N$. cbdo.

Konczy to równiez dowód, ze $(H(X), h)$ jest zupelna przestrzenia metryczna.