11. PODSTAWOWE WLASNOSCI PRZESTRZENI METRYCZNYCH.

(Opracowano korzystajac z kilku podreczników analizy matematycznej.)

Przypomnijmy podstawowe fakty dotyczace przestrzeni metrycznych, znajomosc których jest niezbedna do zrozumienia niektórych rozdzialów niniejszego opracowania. Twierdzenia podajemy tu bez dowodu. Mozna je znalezc w standardowych podrecznikach analizy matematycznej.

DEFINICJA 11.A ***Przestrzenia metryczna*** (X, d) nazywamy zbiór X wraz z funkcja $d: X \times X \to R$ zwana ***metryka*** i spelniajaca nastepujace aksjomaty:

(i) $d(x, y) = d(y, x)$, dla kazdych $x, y \in X$

(odleglosc punktu x od punktu y jest taka sama jak odleglosc punktu y od punktu x)

(ii) $0 < d(x, y) < \infty$, dla kazdych $x, y \in X, x \neq y$

(odleglosc dwóch róznych punktów jest skonczona i dodatnia)

(iii) $d(x, x) = 0$

(odleglosc punktu od samego siebie wynosi zero)

(iiii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, dla kazdych $x, y, z \in X$

(zadna droga, która nie prowadzi bezposrednio od punktu x do y, nie moze byc krótsza od drogi bezposredniej).

PRZYKLAD A. Przykladem przestrzeni metrycznych jest przestrzen euklidesowa R^n. Odleglosc w R^n jest zdefiniowana nastepujaco:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \, ,$$

gdzie $x_1, x_2, ..x_n$ i $y_1, y_2, ..., y_n$ sa wspólrzednymi punktów x i y, a n jest skonczone. (Elementy dowolnej przestrzeni metrycznej nazywac bedziemy nizej punktami.)

W przypadku, gdy $n = 1$, $d(x, y) = |x - y|$.

(Jak postapic, gdy $n = \infty$? Przestrzen R^∞ moze zostac zaopatrzona w analogicznie zdefiniowana metryke:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2} \, ,$$

jesli ograniczymy ja tylko do tych ciagów x_1, x_2, x_3 .., dla których szereg $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ...$ jest zbiezny. Przestrzen ta, to ***przestrzen Hilberta***.)

Podstawowymi topologicznymi wlasnosciami przestrzeni metrycznych i ich podzbiorów sa *otwartosc, domknietosc, zwartosc i zupelnosc.* Wprowadzmy te pojecia korzystajac z intuicyjnie jasnego pojecia *kuli*.

DEFINICJA 11.B Niech (X, d) bedzie przestrzenia metryczna. **Kula otwarta** (w skrócie – kula) $K(x, \varepsilon)$ o srodku w punkcie $x \in X$ i promieniu ε nazywamy zbiór $y \in X$ takich, ze $d(x, y) < \varepsilon$ tzn.

$$K(x, e) = \{y \in X: d(x, y) < e\}.$$

DEFINICJA 11.C Niech $S \subset X$ bedzie podzbiorem przestrzeni metrycznej (X, d). Zbiór S nazywany jest zbiorem ***otwartym,*** jezeli kazdy $x \in S$ nalezy do S wraz z pewna kula tzn. dla kazdego $x \in S$ istnieje $e > 0$ takie, ze

$$K(x, e) = \{y \in X : d(x, y) < e\} \subset S.$$

Domknietosc zbioru definiuje sie poprzez jego *punkty skupienia.*

DEFINICJA 11.D Niech (X, d) bedzie przestrzenia metryczna. Punkt $x \in X$ nazywany jest ***punktem skupienia*** zbioru $S \subset X$, jesli kazda kula o srodku w punkcie x zawiera punkt y nalezacy do S i rózny od x.

(Punkt x moze, ale nie musi byc punktem zbioru S. Chodzi tylko o to, by w jego **dowolnym** otoczeniu skupione byly inne punkty zbioru S.)

Z definicji tej wynika, ze jesli x nalezacy do X jest punktem skupienia zbioru $S \subset X$, to w zbiorze S istnieje ciag punktów $x_1, x_2, x_3, ...,$ **róznych od x**, którego granica jest punkt x.

Jak to wspomnielismy wyzej punkty skupienia dowolnego zbioru nie musza do niego nalezec. Jesli tak jednak jest , to zbiór taki nazywamy domknietym. Podajmy formalna definicje.

DEFINICJA 11.E Niech (X, d) bedzie przestrzenia metryczna. Zbiór $S \subset X$ jest ***domkniety***, jesli kazdy punkt skupienia zbioru S nalezy do S.

W zbiorze S moga znajdowac sie punkty, które nie sa jego punktami skupienia.

DEFINICJA 11.F Punkty zbioru X nie bedace jego punktami skupienia nazywane sa ***punktami izolowanymi***.

Jesli x nalezacy do zbioru S jest jego punktem izolowanym, to w zbiorze S nie da sie znalezc ciagu, którego wszystkie punkty bylyby rózne od x, i który bylby zbiezny do x. Oczywiste jest, ze jesli zbiór S sklada sie ze skonczonej liczby punktów, to wszyskie one sa punktami izolowanymi.

Jesli zbiór S nie jest domkniety, to mozna go domknac dolaczajac do niego wszystkie jego punkty skupienia, a wiec granice wszystkich ciagów zbieznych nalezacych do S. Domkniecie zbioru S bedziemy oznaczac $\overline{S}$.

Zbiór S jest wiec domkniety, jesli zachodzi $S = \overline{S}$, tzn. zbiór S pokrywa sie ze swoim domknieciem.

DEFINICJA 11.G Zbiór wszystkich punktów skupienia zbioru S nazywany jest jego ***pochodna*** i oznaczany S^d.

Domkniecia zbioru dokonujemy przez dolaczenie do niego jego pochodnej:

$$\overline{S} = S \cup S^d.$$

Miedzy otwartoscia i domknietoscia istnieje nastepujacy prosty zwiazek.

TWIERDZENIE 11.A Zbiór $S \subset X$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jego dopelnienie tzn. zbiór $X \backslash S$ jest domkniety.

Zbiór pusty $\emptyset$ jest zbiorem domknietym. Cala przestrzen X jest zbiorem domknietym. Wynika z tego, ze i zbiór $\emptyset$ i cala przestrzen X sa jednoczesnie zbiorami otwartymi. (Nie jest wiec tak, ze kazdy zbiór musi byc albo otwarty, albo domkniety!)

PRZYKLADY. Kazdy zbiór skonczony, tj. zlozony ze skonczonej liczby punktów jest domkniety.

Zbiór liczb calkowitych jest domknietym podzbiorem przestrzeni liczb rzeczywistych. R^1.

Zbiór liczb wymiernych W jest otwarty w przestrzeni liczb rzeczywistych R. Istnieja bowiem ciagi liczb wymiernych majace swe granice w R ale poza W. Tymi granicami sa oczywiscie liczby niewymierne.

TWIERDZENIE 11.B Suma i iloczyn skonczonej rodziny zbiorów domknietych jest zbiorem domknietym.

Domkniecie zbioru, który nie byl domkniety, powieksza go o te punkty skupienia, które do niego nie nalezaly. To powiekszenie moze byc tak wydatne, ze pokryje cala przestrzen, której dany zbiór jest podzbiorem wlasciwym.

DEFINICJA 11.H Zbiór S nazywamy ***gestym*** w przestrzeni X , jesli jego domkniecie pokrywa sie z cala przestrzenia X : $\overline{S} = X$.

Zbiór liczb wymiernych jest gesty w przestrzeni liczb rzeczywistych, bo kazda liczba rzeczywista x (czy to wymierna czy nie) da sie przedstawic jako granica ciagu liczb wymiernych róznych od x.

Zbiór liczb niewymiernych, bedacy jego dopelnieniem zbioru liczb wymiernych w przestrzeni liczb rzeczywistych, jest w tej przestrzeni tez zbiorem gestym.

DEFINICJA 11.I Zbiór S nazywamy zbiorem ***brzegowym***, jesli jego dopelnienie tzn. zbiór $X \backslash S$ jest zbiorem gestym.

Zbiory liczb wymiernych i liczb niewymiernych sa wiec zbiorami brzegowymi w przestrzeni liczb rzeczywistych.

Dolaczenie do zbioru gestego nowych elementów nie moze oczywiscie popsuc jego gestosci. Podobnie usuniecie ze zbioru brzegowego dowolnych elementów nie moze doprowadzic do tego, by stal sie on zbiorem gestym. Stad,

TWIERDZENIE 11.C *Kazdy zbiór, którego jakis podzbiór jest zbiorem gestym, sam musi byc gesty, zas kazdy podzbiór zbioru brzegowego sam musi byc brzegowy.*

Powstaje pytanie, jak zbiór gesty wypelnia przestrzen.

TWIERDZENIE 11.D *Zbiór S jest gesty w przestrzeni X wtedy i tylko wtedy, gdy w kazdej kuli nalezacej do X istnieja punkty zbioru S.*

Podobnie mozemy spytac, jak z tego punktu widzenia wyglada zbiór brzegowy.

TWIERDZENIE 11.E *Zbiór S jest brzegowy w przestrzeni X wtedy i tylko wtedy, gdy w kazdej kuli nalezacej do przestrzeni X istnieja punkty nie nalezace do S.*

Mówiac innymi slowy, jesli zbiór jest brzegowy, to z zadnego jego miejsca nie da sie wykroic kuli (która zawieralaby tylko jego wlasne punkty).

Brzegowosc i gestosc nie wykluczaja sie wzajemnie. Na przyklad zbiory liczb wymiernych i niewymiernych sa jednoczesnie zbiorami brzegowymi i gestymi w przestrzeni liczb rzeczywistych.

Suma dwu zbiorów brzegowych nie musi byc zbiorem brzegowym. Na przyklad, suma wspomnianych wyzej zbiorów liczb wymiernych i niewymiernych nie jest zbiorem brzegowym, bo równa sie calej przestrzeni.

DEFINICJA 11.J Zbiór, którego kazdy punkt jest jednoczesnie jego punktem skupienia, nazywany jest zbiorem ***w sobie gestym***.

Zbiory w sobie geste i jednoczesnie domkniete okreslane sa mianem zbiorów ***doskonalych***.

Zbiory w sobie geste nie zawieraja wiec zadnego punktu izolowanego.

Nastepnym bardzo waznym i w wielu wypadkach wygodnym pojeciem charakteryzujacym zbiory jest *zwartosc*. Istnieja jej dwie równowazne definicje: 'pokryciowa' i 'ciagowa'.

DEFINICJA 11.K Niech (X, d) bedzie przestrzenia metryczna. ***Pokryciem otwartym*** (w skrócie: pokryciem) zbioru $S \subset X$ nazywamy rodzine $\{G_\alpha\}$ podzbiorów otwartych przestrzeni X spelniajacych warunek

$$S \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$$

DEFINICJA 11.L Podzbiór S przestrzeni metrycznej X nazywa sie ***zwartym,*** jesli kazde pokrycie otwarte zbioru S zawiera podpokrycie skonczone.

Mówiac bardziej obrazowo chodzi o to, ze jesli $\{G_\alpha\}$ jest rodzina pokrywajaca S, to mozna znalezc skonczona ilosc wskazników $a_1, ..., a_n$ takich, ze

$S \subset G_{\alpha\in} \cup ... \cup G_{a_n}$.

Ponizej zestawiono najwazniejsze twierdzenia dotyczace zwartosci.

TWIERDZENIE 11.F *Zwarte podzbiory przestrzeni metrycznej sa domkniete.*

TWIERDZENIE 11.G *Domkniete podzbiory zbiorów zwartych sa zwarte.*

DEFINICJA 11.M Niech (X, d) bedzie przestrzenia metryczna. Zbiór $S \subset X$ jest ***ograniczony***, jezeli istnieje taka liczba M i taki punkt $x \in X$, ze $d(y, x) < M$ dla wszystkich $y \in S$.

DEFINICJA 11.N Przestrzen (X, d) jest ***calkowicie ograniczona***, gdy dla kazdego $e > 0$ istnieje skonczony uklad n punktów

$x_{1(e)}, ..., x_{n(\varepsilon)} \in X$ taki, ze $\bigcup_{i=1}^{n(\varepsilon)} K(x_i, \varepsilon) = X$.

Zdefiniowany wyzej zbiór punktów czesto nazywa sie *e* ***siatka***.

TWIERDZENIE 11.H *Niech (X, d) bedzie zupelna przestrzenia metryczna. Niech $S \subset X$. Zbiór S jest* *zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domkniety i calkowicie ograniczony.*

(Definicja zupelnej przestrzeni metrycznej podana jest nizej.)

Dla przestrzeni euklidesowych zachodzi:

TWIERDZENIE 11.I *Niech $S \subset R^n$ S jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony i domkniety.*

Na przyklad zbiór $[0, 1] \times [0, 1] \subset R^2$ jest zwarty.

DEFINICJA 11.O (*zbieznosci ciagu*) Ciag $\{x_n\}$ punktów przestrzeni metrycznej (X, d) jest ***zbiezny*** do punktu $x \in X$, jesli dla dowolnego $e > 0$ istnieje liczba calkowita $N > 0$ taka, ze:

$$d(x_n, x) < e \text{ dla wszystkich } n > N.$$

W tym przypadku punkt $x \in X$, do którego zbiega sie dany ciag, nazywany jest *granica* tego ciagu co zapisuje sie jako

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n .$$

Podajmy obecnie zapowiedziana wyzej ciagowa definicje zwartosci.

DEFINICJA 11.P Niech S bedzie podzbiorem przestrzeni metrycznej (X, d). S jest zbiorem ***zwartym***, jesli kazdy nieskonczony ciag $\{x_n\}$ punktów w S zawiera podciag zbiezny do punktu nalezacego do S.

Sprawdzmy sens **TWIERDZENIE 11.H.** Niech S bedzie odcinkiem otwartym (0, 1). Czy jest to zbiór zwarty? Rozwazmy ciag $x_n = 1/n$. Wszystkie jego wyrazy zawarte sa w S, ale jego granica lezy poza S. Nie da sie wiec wybrac z niego podciagu zbieznego do jakiegos punktu zawartego w S. Jesli rozwazymy odcinek domkniety [0, 1], to z kazdego zdefiniowanego w nim ciagu nieskonczonego mozemy wybrac podciag zbiezny do pewnego punktu w [0, 1].

DEFINICJA 11.Q Ciag $\{x_n\}$ w przestrzeni metrycznej X nazywamy ***ciagiem Cauchy'ego***, jesli dla dowolnego $e > 0$ istnieje liczba calkowita N taka, ze $d(x_n,x_m) < e$ dla $n, m \geq N$.

TWIERDZENIE 11.J *Jesli ciag punktów $\{x_n\}$ przestrzeni metrycznej (X, d) jest zbiezny do punktu $x \in X$,* to *$\{x_n\}$ jest ciagiem Cauchyego.*

DEFINICJA 11.R Przestrzen metryczna (X, d) jest ***zupelna***, jesli kazdy ciag Cauchyego $\{x_n\} \in X$ jest zbiezny do $x \in X$.

Przykladem zupelnej przestrzeni metrycznej jest R^k (k = 1, 2, ...), natomiast zbiory liczb wymiernych i niewymiernych nie sa przestrzeniami zupelnymi, bo i w jednym i drugim przypadku mozemy znalezc w nich ciagi Cauchy'ego majace swoja granice poza tymi zbiorami.

TWIERDZENIE 11.K Jesli (X, d) jest zwarta przestrzenia metryczna, to (X, d) jest równiez przestrzenia zupelna.

W dalszych rozwazaniach niezbedne beda równiez podstawowe pojecia z teorii funkcji np. *granica funkcji, ciaglosc funkcji.* Jak poprzednio, wszystkie definicje, twierdzenia i ich dowody znalezc mozna w standardowych podrecznikach analizy matematycznej.

DEFINICJA 11.S (***granicy funkcji***) Niech X i Y beda przestrzeniami metrycznymi. Niech $E \subset X$, a f niech bedzie odwzorowaniem E w Y, zas p – punktem skupienia zbioru E. Piszemy $f(x) \to q$ dla $x \to p$ lub $\lim_{x\to p} f(x) = q$, jesli istnieje punkt $q \in Y$ o nastepujacych wlasnosciach:

dla kazdego $e > 0$ istnieje $d > 0$ taka, ze

$$d_Y(f(x), q) < e$$

dla wszystkich $x \in E$, dla których

$$0 < d_X(x, p) < d.$$

Zachodzi :

TWIERDZENIE 11.L *Niech X, Y, E, f, p maja to samo znaczenie co w def. 13. Wtedy $\lim_{x\to p} f(x) = q$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n\to\infty} f(p_n) = q$ dla dowolnego ciagu $\{p_n\}$ takiego, ze $p_n \neq p, \lim_{n\to\infty} p_n = p$, $p_n \in E$ dla wszystkich n.*

DEFINICJA 11.T Odwzorowanie $f\ : X \to Y$ z przestrzeni metrycznej (X, d) w przestrzen metryczna (Y, g) jest ***ciagle,*** jesli dla kazdego $e > 0$ i $x \in X$ istnieje $d > 0$ taka, ze :

$$d(x,y) < d \Rightarrow g(f(x), f(y)) < e.$$

Mówiac bardziej obrazowo funkcja jest ciagla, jezeli jej wykres mozna narysowac 'bez odrywania pióra od kartki'.

Jesli p jest punktem skupienia X to zachodzi:

TWIERDZENIE 11.M *Funkcja f jest ciagla w punkcie p wtedy i tylko wtedy,*

gdy $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.

Oprócz twierdzenia 1.13 istnieje 'czysto topologiczna' interpretacja ciaglosci.

TWIERDZENIE 11.N *Odwzorowanie f przestrzeni metrycznej X w przestrzen metryczna Y jest ciagle na X wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór* $f^{-1}(V)$ *jest otwarty w X dla kazdego zbioru otwartego V z Y.*

Okazuje sie, ze ciaglosc odwzorowania pozwala na przenoszenie miedzy przestrzeniami pewnych wlasnosci topologicznych np. zwartosci.

TWIERDZENIE 11.O *Niech f bedzie odwzorowaniem ciaglym zwartej przestrzeni metrycznej X w przestrzen metryczna Y. Wtedy* $f(X)$ *jest zwarty.*

Ponadto:

TWIERDZENIE 11.P *Niech f bedzie ciagla funkcja rzeczywista okreslona na zwartej przestrzeni metrycznej X i* $M = \sup_{p \in X} f(p)$, $m = \inf_{p \in X} f(p)$.

Wtedy istnieja punkty $p, q \in X$ *takie, ze* $f(p) = M$ *i* $f(q) = m$.

Inaczej mówiac funkcja osiaga swoje maksimum i minimum.

DEFINICJA 11.U Niech f bedzie odwzorowaniem przestrzeni metrycznej X w przestrzen metryczna Y. Mówimy, ze f jest *jednostajnie ciagle* na X, jesli dla kazdego $e > 0$ istnieje $d > 0$ taka, ze

$$d(f(p), f(q)) < e$$

dla wszystkich p, q z X, dla których $d(p,q) < d$.

W przypadku zbiorów zwartych pojecia ciaglosci i ciaglosci jednostajnej sa równowazne.

TWIERDZENIE 11.Q *Niech f bedzie odwzorowaniem ciaglym zwartej przestrzeni metrycznej X w przestrzen metryczna Y. Wówczas f jest jednostajnie ciagla na X.*

W zwiazku z teoria miary i calki wazne sa pojecia *zbieznosci punktowej i jednostajnej* ciagu funkcji.

DEFINICJA 11.V Niech $\{f_n\}$, $n = 1, 2, ...$, bedzie ciagiem funkcji okreslonych na zbiorze E i niech ciag liczb $\{f_n(x)\}$ bedzie zbiezny dla kazdego $x \in E$. Wtedy okresla sie funkcje f jako

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) .$$

W tym przypadku mówi sie, ze ciag $\{f_n\}$ jest zbiezny na zbiorze E i funkcja f jest granica tego ciagu. Taka zbieznosc nazywa sie ***zbieznoscia punktowa***.

DEFINICJA 11.W Ciag funkcji $\{f_n\}$, $n = 1, 2, ...$, jest *zbiezny jednostajnie* na zbiorze E do funkcji f, jesli dla dowolnego $e > 0$ istnieje liczba naturalna m taka, ze dla $n \geq m$ zachodzi

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| \leq e$$

dla dowolnego $x \in E$.

Oczywiscie kazdy ciag zbiezny jednostajnie jest zbiezny punktowo. Róznica miedzy zbieznoscia punktowa a jednostajna polega na tym, ze w pierwszym przypadku dla dowolnego $e > 0$ i dla dowolnego ustalonego x mozna dobrac takie m (które nie zalezy ani od e ani od x), ze dla $n \geq N$ bedzie spelniona powyzsza nierównosc. W przypadku zbieznosci jednostajnej dla kazdego $e > 0$ mozna dobrac jedna wspólna dla wszystkich punktów $x \in E$ liczbe m.