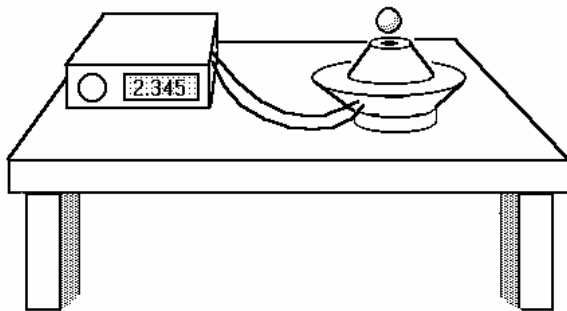


XIV. MODEL SKACZĄCEJ KULKI

Kuleczka spada na płaską, idealnie poziomą powierzchnię przymocowaną do membrany głośnika. Głośnik zasilany jest ze źródła napięcia sinusoidalnego o stałej częstotliwości ω i amplitudzie kontrolowanej przez eksperymentatora. Patrz Rys. XIV-A.



Rys. XIV-A Eksperymentalna realizacja modelu skaczącej kulki.

Przyjmujemy, że skoki kulki są idealnie pionowe (co w realnym eksperymencie wymaga pewnej uwagi ze względu na łatwość wzbudzenia oscylacji bocznych). Zakładamy też, że amplituda i kształt wibracji powierzchni pozostają niezmiennie bez względu na to, w jakim modzie ruchu znajdzie się sama kulka.

Przy takich założeniach model skaczącej kulki, w skrócie BB (od Bouncing Ball), może być traktowany jako szczególny przypadek układu trzech ciał. Patrz Rys. XIV-B. Trzy masy, $M \gg m \gg \mu$ poruszają się tu względem siebie oddziałując między sobą siłami różnego rodzaju.

Masa duża M (laboratorium, w którym zamocowany jest głośnik) sprzężona jest z masą o średniej masie m (membrana+przymocowana do niej powierzchnia) idealnie sprężystą sprężyną, co czyni, że ten podukład jest układem liniowym (jego drgania własne mają formę sinusoidalną, o stałej, niezależnej od amplitudy częstotliwości).

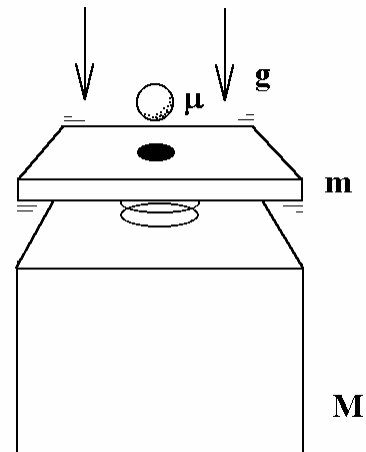
Kuleczka o masie μ przyciągana jest do masy M siłami grawitacyjnymi, jednak jej ruch ograniczany jest z dołu przez powierzchnię o masie m , z którą kulka oddziałuje siłami o bardzo krótkim zasięgu (spotkanie kulki z powierzchnią – to zderzenie). Tak więc, ten drugi podukład jest silnie nieliniowy.

Teoretyczny model BB można rozwiązać i w wersji zachowawczej, ale każda praktyczna jego realizacja zachowawcza nie jest, bowiem zderzenia realnej kulki z realną powierzchnią nigdy nie są w pełni sprężyste tzn. w każdym ich zderzeniu część energii kinetycznej kulki jest tracona.

W dalszym ciągu przyjmujemy, że w układzie odniesienia związanym z powierzchnią każde zderzenie przebiega według tego samego scenariusza:

- (i) kulka przybywa do powierzchni z prędkością w^- ,
- (ii) podczas zderzenia pewna część energii kinetycznej kulki jest tracona,
- (iii) kulka opuszcza powierzchnię z prędkością:

$$(XIV.A) \quad w^+ = -kw^-, \text{ gdzie } 0 < k < 1.$$



Rys. XIV-B Model skaczącej kulki może być interpretowany jako szczególny przypadek problemu trzech ciał.

Równanie to stanowi punkt wyjścia do prowadzonych w następnym rozdziale rozwiązań nad równaniami ruchu układu BB

RÓWNANIA RUCHU

Dla uproszczenia notacji i uogólnienia rozwiązań wprowadzmy bezwymiarowe zmienne długości i czasu.

Definiujemy więc bezwymiarowy czas:

$$(XIV.B) \quad \Theta = \frac{2pt}{T_s}$$

oraz bezwymiarową długość:

$$(XIV.C) \quad h = \frac{8p^2 l}{gT_s^2}$$

gdzie t i l są, odpowiednio, czasem i długością mierzonymi w dowolnych jednostkach, zaś T_s jest okresem drgań płaszczyzny zderzeń a g stałą przyspieszenia grawitacyjnego zmierzonymi w tych samych jednostkach co t i l .

Stale czynniki $(2\pi$ i $\pi^2)$ pojawiające się w definicjach Θ i h wprowadzono dla osiągnięcia zgodności przybliżonych równań ruchu z tzw. mapą standardową. Problem ten będzie dyskutowany dalej

W terminach bezwymiarowego czasu i długości okres drgań płaszczyzny zderzeń wynosi 2π , a stała przyspieszenia grawitacyjnego równa jest 2.

Ruch płaszczyzny zderzeń dany jest równaniem:

$$(XIV.D) \quad h_s(\Theta) = -A \cos(\Theta)$$

Formalne wyprowadzenie równań ruchu skaczącej kulki jest raczej skomplikowane, dlatego pójdziemy inną drogą: podamy je i przedyskutujemy ich sens fizyczny.

Równania są trzy

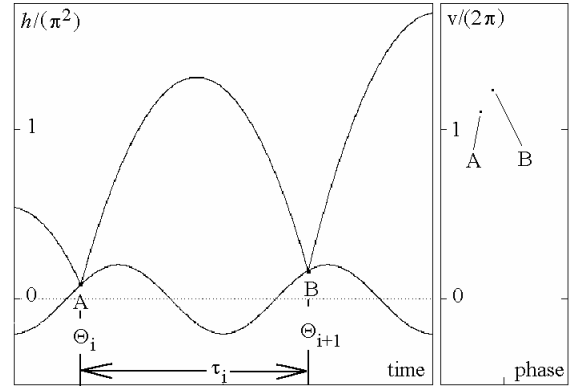
$$(XIV.E) \quad \begin{aligned} & -A \cos(\Theta_i) + v_i t_i - t_i^2 \\ & = -A \cos(\Theta_i + t_i) \end{aligned}$$

$$(XIV.F) \quad \Theta_{i+1} = \Theta_i + t_i$$

$$(XIV.G) \quad \begin{aligned} v_{i+1} = & -k(v_i - 2t_i) + \\ & A(1+k) \sin(\Theta_{i+1}) \end{aligned}$$

v_i oznacza tu (bezwymiarową) prędkość kulki w laboratoryjnym układzie odniesienia zmierzona tuż po i -tym zderzeniu, zaś t_i jest czasem trwania skoku, w który kulka wchodzi po tym zderzeniu.

Równania (XIV.E), (XIV.F) i (XIV.G) opisują kompletną historię jednego ze skoków kulki: i -tego, patrz Rys. XIV-A.



Rys. XIV-A Detale i -tego skoku kulki.

Skok ten rozpoczyna się w chwili Θ_i , w której zachodzi i -te zderzenie. Kulka wychodzi z tego zderzenia z prędkością v_i . Zderzenie to ma miejsce na wysokości $[-A \cos(\Theta_i)]$, na której znajduje się płaszczyzna.

Trajektoria ruchu kulki, jaka następuje po zderzeniu jest trajektorią ciała w zagadnieniu rzutu pionowego z wysokości $[-A \cos(\Theta_i)]$, z prędkością początkową v_i , w polu grawitacyjnym o stałej przyspieszenia grawitacyjnego równej 2. Lewa strona równania (XIV.E) opisuje te trajektorie w terminach czasu lokalnego τ , tj. czasu, którego upływ liczony jest od ostatniego zderzenia. Prawa strona równania opisuje trajektorie zachodzącego jednocześnie ruchu płaszczyzny zderzeń. Gdy te dwie trajektorie spotykają się ponownie, co ma miejsce po czasie t_i od i -tego zderzenia, zachodzi zderzenie $(i+1)$ -sze. Równanie (XIV.F) określa jego moment Θ_{i+1} . By procedura znajdowania momentu kolejnego zderzenia mogła być powtórzona, musimy znaleźć jeszcze prędkość kulki tuż po $(i+1)$ -szym zderzeniu. Uczynmy to.

Jeśli układ obserwujemy w układzie odniesienia związanym z laboratorium, to stwierdzimy, że do $(i+1)$ -szego zderzenia kulka podchodzi z prędkością równą:

$$(XIV.H) \quad (v_i - 2t_i)$$

bowiem do i -tego skoku wystartowała z prędkością v_i , a jej lot trwający czas t_i odbywał się w polu grawitacyjnym o stałej przyspieszenia równej 2. Przechodząc do układu odniesienia związanego z płaszczyzną zderzeń stwierdzimy, że jej prędkość tuż przed zderzeniem $(i+1)$ -szym zderzeniem równa jest

$$(XIV.I) \quad w_{i+1}^- = [(v_i - 2t_i) - A \sin(\Theta_{i+1})]$$

gdzie $A \sin(\Theta_{i+1})$ określa prędkość płaszczyzny (w układzie laboratoryjnym) w chwili zderzenia.

Korzystając z równania (XIV.A) możemy określić prędkość kulki (w układzie związanym z płaszczyzną zderzeń) tuż po (i+1)-szym zderzeniu:

$$(XIV.J) \quad w_{i+1}^+ = -k[(v_i - 2t_i) - A \sin(\Theta_{i+1})]$$

Tak więc powracając do układu laboratoryjnego znajdujemy szukaną prędkość kulki tuż po (i+1)-szym zderzeniu:

$$(XIV.K) \quad \begin{aligned} v_{i+1} = & \\ & -k[(v_i - 2t_i) - A \sin(\Theta_{i+1})] \\ & + A \sin(\Theta_{i+1}) = \\ & -k(v_i - 2t_i) + A(1+k) \sin(\Theta_{i+1}) \end{aligned}$$

Równania (XIV.E), (XIV.F) i (XIV.G) opisują poprawnie większość zjawisk obserwowanych w laboratoryjnym układzie BB. Jednakże istnieje cała klasa ruchów skaczącej kulki, dla których są one niewystarczające. Problem polega na tym, że ciąg skoków kulki może okazać się zbieżny, tzn. w skończonym czasie, choć po nieskończonej liczbie skoków, kulka może osiąść na płaszczyźnie zderzeń. Jeśli zjawisko takie wystąpi, równania (XIV.E), (XIV.F) i (XIV.G) okazują się bezużyteczne. Algorytm numerycznej symulacji układu BB musi być na to przygotowany i odpowiednio zareagować. Jeśli więc w procesie numerycznego rozwiązywania równań (XIV.E), (XIV.F) i (XIV.G) pojawi się sekwencja malejących skoków, trzeba zbadać, czy jest ona zbieżna a jeśli tak, to trzeba następnie wyznaczyć przy pomocy innego algorytmu punkt zbieżności, od którego dalszy ruch kulki pokrywa się z ruchem płaszczyzny zderzeń (kulka siedzi na płaszczyźnie poruszając się z nią) aż do momentu (jeśli taki istnieje), w którym przyspieszenie przekroczy wartość przyspieszenia grawitacyjnego. Poszukanie i wyznaczenie tego momentu stanowi kolejny, oddzielny element algorytmu.

Dla prostych periodycznych modów ruchu skaczącej kulki równania (XIV.E), (XIV.F) i (XIV.G) mogą zostać istotnie uproszczone. Zauważmy, że jeśli ruch jest periodyczny i czasowa długość skoków kulki jest wielokrotnością okresu drgań płaszczyzny, to wszystkie zderzenia odbywają się w tej samej fazie ruchu płaszczyzny: $\Theta_i \bmod 2\pi = \text{const}$, a

wiec przy tym samym jej położeniu. W tej sytuacji wyraży $A \cos(\Theta_i)$ i $A \cos(\Theta_i + \tau_i)$ są sobie równe i równanie (XIV.E) upraszcza się do postaci

$$(XIV.L) \quad \tau_i = v_i$$

co pozwala napisać równania (XIV.F) i (XIV.G) w prostszej formie:

$$(XIV.M) \quad \Theta_{i+1} = \Theta_i + v_i$$

$$(XIV.N) \quad v_{i+1} = kv_i + l \sin(\Theta_i)$$

gdzie

$$(XIV.O) \quad l = (1+k)A$$

Równania (XIV.M) i (XIV.N) opisujące poprawnie najprostsze mody periodyczne skaczącej kulki są użyteczne jeszcze w innym przypadku. Mianowicie, jeśli skoki kulki stają się bardzo wysokie w porównaniu z amplitudą drgań płaszczyzny zderzeń, a więc czasy τ_i bardzo długie, wtedy różnica między członami $A \cos(\Theta_i)$ i $A \cos(\Theta_i + \tau_i)$ może być zaniedbana, co prowadzi do tego samego układu równań (XIV.M) i (XIV.N).