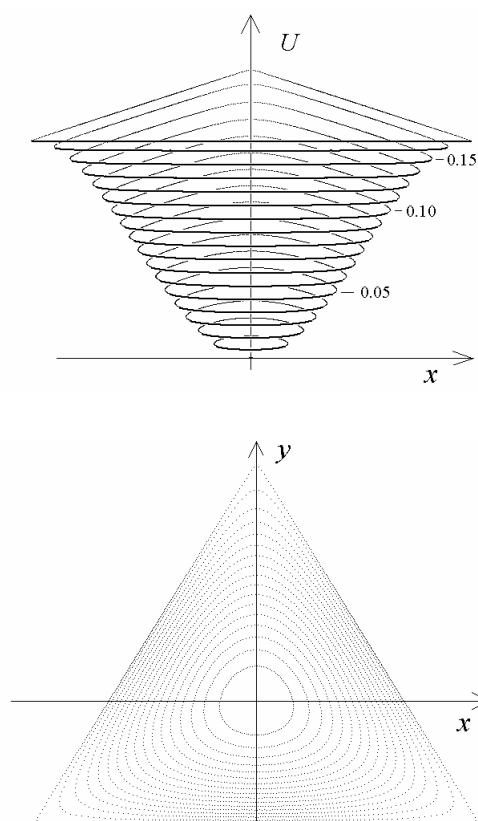


17. CZASTKA W JAMIE POTENCJALU HENONA-HEILESA

Rozważmy jeden z najprostszych, niecałkowalnych układów hamiltonowskich: *czastkę Henona-Heilesa*. Układ ten, to czastka poruszająca się w jamie potencjału opisanej równaniem:

$$(17.A) \quad U(x, y) = x^2/2 + y^2/2 + x^2 y - (1/3) y^3$$

Jej kształt przedstawiono na rys. 17-a.



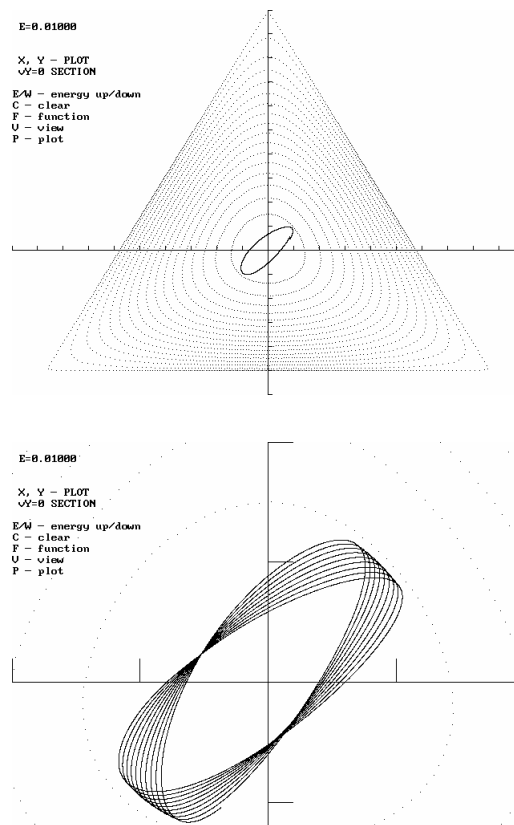
Rys. 17-A Jama potencjału układu Henona-Heilesa widziana z boku, w kierunku osi y i z góry.

Jak widac, jest to jama, której przekroje ekwipotencjalne są koliste przy dnie a trójkątne na górze. Dno jamy ma w przybliżeniu kształt paraboloidy obrotowej:

$$(17.B) \quad U(x, y) \approx x^2/2 + y^2/2,$$

Tak więc możemy spodziewać się, że dla małych energii dynamika czastki będzie bardzo bliska dynamice dwuwymiarowego oscylatora

harmonicznego, zaś dla energii większych dynamika ta może być istotnie różna. Przyjrzyjmy się kształtowi trajektorii czastki w dwóch granicznych przypadkach: energii bardzo małych i energii sięgających wartości 0.166..., która określa ostatnią, trójkątną linię ekwipotencjalną tej jamy.

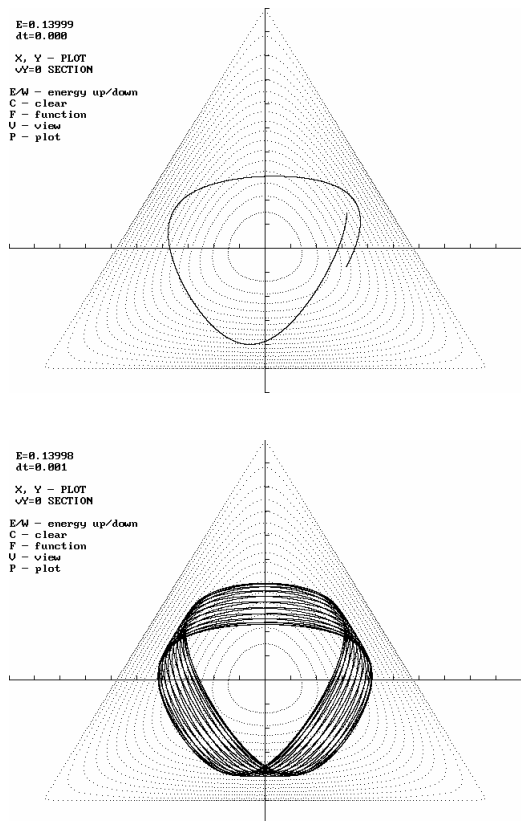


Rys. 17-B Fragment trajektorii obserwowanej w układzie HH dla małej wartości energii. $E=0.01$. Fragment ten jest w przybliżeniu eliptyczny. Obserwacja trajektorii w czasie nieco dłuższym (dolne rysunki narysowane są w zmienionej skali) ujawnia, że osie tej elipsy wykonują ruch precesyjny.

Dla małych energii czastka porusza się po trajektoriach w przybliżeniu eliptycznych, jednak w odróżnieniu od jamy potencjału czysto paraboloidalnej, osie tych elips nie są stabilne, lecz wykonują wolny ruch precesyjny. rys. 17-b. (Brak symetrii obrotowej jamy potencjału powoduje, że ruch ten nie jest jednostajny i możliwe jest zainicjowanie takich trajektorii w przybliżeniu eliptycznych, których osie nie obracają się, lecz oscylują.) W obu tych

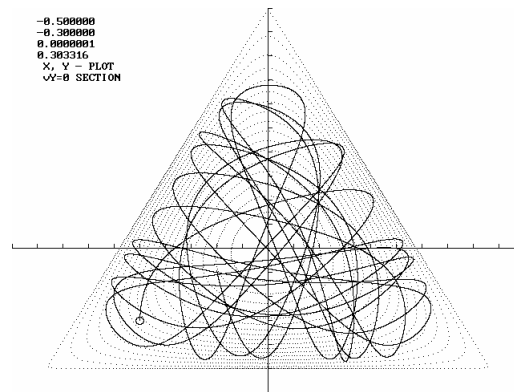
przypadkach mamy jednak do czynienia z ruchem regularnym.

Trajektorie o wyzszej energii, a wiec te, dla których dostępne sa silnie nieliniowe obszary jamy potencjału mogą zachowywać się inaczej. Zbadajmy przypadek $E=0.15$.



Rys. 17-C Przykładowa trajektoria regularna obserwowana w układzie H-H przy $E=0.15$. Rysunek dolny przedstawia te trajektorie zarejestrowane w nieco dłuższym czasie.

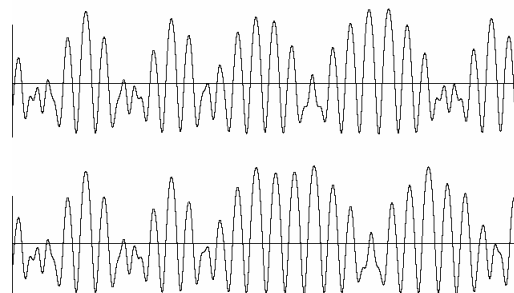
Przy tej wartości energii możliwe jest zainicjowanie trajektorii regularnych, będących odpowiednikiem trajektorii eliptycznych obserwowanych przy $E=0.01$. rys. 17-c. Jak widac, kształt pojedynczego zwoju takiej trajektorii jest już daleki od eliptycznego, bowiem ten obszar studni potencjału, w którym trajektoria porusza się, jest już bardzo różny od parabolicznego. Zainicjowanie trajektorii z innego punktu początkowego może spowodować, że będzie to trajektoria chaotyczna.



Rys. 17-D Trajektoria chaotyczna w układzie H-H obserwowana przy $E=0.15$.

$x = -0.5$, $y = -0.30000$, $v_x = 0$, $v_y = 0.30332$

rys. 17-d przedstawia typową trajektorie chaotyczną. Ze trajektoria ta jest bardzo czuła na warunki początkowe można łatwo przekonać się badając kształt trajektorii bignacej w pobliżu.



Rys. 17-E Wykresy $x(t)$ dla dwóch trajektorii zainicjowanych z bliskich sobie punktów początkowych:

$x = -0.5$, $y = -0.30000$, $v_x = 0$, $v_y = 0.30332$

$x = -0.5$, $y = -0.30001$, $v_x = 0$, $v_y = 0.30331$

rys. 17-e przedstawia wykresy $x(t)$ dla dwóch trajektorii zainicjowanych z bliskich sobie punktów początkowych. Jak widac, mimo, iż początkowe części tych trajektorii wydają się różnić od siebie, już po krótkim czasie, ich drogi rozbiegają się.

W celu zorientowania się, jaka część przestrzeni fazowej dostępnej przy danej energii zajeta jest przez trajektorie regularne, a jaka przez trajektorie chaotyczne, możemy wykorzystać technikę wynalezioną przez Poincarého.