10. ZBIÓR CANTORA, WYMIAR ULAMKOWY

Wezmy odcinek domkniety [0, 1] i poddajmy go nastepujacemu ciagowi operacji:

Krok 1.
Podzielmy odcinek wyjsciowy na trzy równe czesci i wytnijmy czesc srodkowa, bez jej brzegów, tzn. przedzial otwarty (1/3, 2/3).
Zbiór I_1, który pozostaje po tej operacji, sklada sie z N_1=2 przedzialów domknietych, $P_{1,1}$=[0, 1/3] oraz $P_{1,2}$=[2/3, 1], sam jest wiec domkniety. Jego calkowita dlugosc wynosi L_1=2/3.

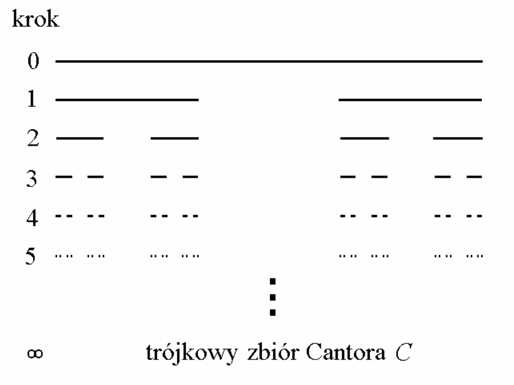
Krok *i*=2.
Kazdy z odcinków [0, 1/3] oraz [2/3, 1], dzielimy na trzy równe czesci i usuwamy otwarte czesci srodkowe, a wiec przedzialy (1/9, 2/9), (7/9, 8/9).
Zbiór I_2, który pozostaje, sklada sie z N_2=4 przedzialów domknietych, $P_{2,1}$, $P_{2,2}$, $P_{2,3}$, $P_{2,4}$, kazdy o dlugosci 1/9. W sumie wiec jego dlugosc wynosi L_2=4/9.
.
.
.
Krok n-ty.
Kazdy z $N_{n-1} = 2^{n-1}$ przedzialów domknietych $P_{n-1,1}$, $P_{n-1,2}$, $P_{n-1,3}$, ..., z których sklada sie zbiór I_{n-1}, dzielimy na trzy równe czesci i usuwamy otwarte czesci srodkowe. W efekcie tej operacji, zbiór I_n, który pozostaje, sklada sie z $N_n = 2^n$ przedzialów domknietych $P_{n,1}$, $P_{n,2}$, $P_{n,3}$, ...,

$$I_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} P_{n,k} \qquad (10.A)$$

Kazdy przedzial $P_{n,k}$ ma dlugosc $(1/3)^n$, a wiec calkowita dlugosc I_n wynosi $L_n=(2/3)^n$.
.
.
.
Zbiór C zdefiniowany jako

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \qquad (10.B)$$

nazywany jest **trójkowym zbiorem Cantora**.



Rys. 10-A Konstrukcja trójkowego zbioru Cantora *C*.

C jest zbiorem o paradoksalnych wlasnosciach. Ponizej postaramy sie omówic najbardziej interesujace z nich przedstawiajac je w formie lematów.

LEMAT 1.
C jest zbiorem **domknietym**.

Dowód.
Niech $\{x_n\}\subset C$ bedzie ciagiem zbieznym. Poniewaz $\{x_n\}\subset C$, wiec ze wzgledu na 10.b) $\{x_n\}\subset I_n$, dla kazdego *n*. Ale kazdy ze zbiorów I_n jest zbiorem domknietym, wiec granica ciagu $\{x_n\}$, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, musi do niego nalezec: $x\in I_n$. Jesli zas, dla kazdego *n*, $x\in I_n$, to ze wzgledu na 10.b) musi tez zachodzic: $x \in C$. A wiec kazdy ciag zbiezny ze zbioru *C* ma w nim swa granice, czyli zbiór *C* jest domkniety. cbdo.

LEMAT 2.
C jest zbiorem **brzegowym**.

Dowód.
Kazdy niepusty przedzial otwarty (*a*, *b*) ma skonczona dlugosc: |a-b|. Miara zbioru *C* wynosi 0, nie moze wiec on zawierac zadnego niepustego przedzialu otwartego. Jest wiec zbiorem brzegowym.

LEMAT 3.
C jest zbiorem **doskonalym**.

Dowód.
Wiemy z lematu 1, ze C jest zbiorem domknietym. Niech $x \in C$. Wobec 10.b) x musi tez byc elementem kazdego z kolejnych zbiorów I_n. Dla dowolnego n niech $k(n)$ oznacza drugi indeks tego ze zbiorów P skladajacych sie zgodnie z (10.a) na I_n, do którego nalezy x:

$$x \in P_{n,k(n)}. \quad (10.C)$$

Niech y_n bedzie jednym z punktów brzegowych przedzialu $P_{n,k(n)}$. (Jesli x jest punktem brzegowym, to y_n jest drugim brzegiem. Jak wiemy, punkty brzegowe przedzialów P sa elementami C.) Wiemy, ze w tej sytuacji odleglosc miedzy x i y_n nie moze byc wieksza niz $(1/3)^n$. Ciag y_n jest ciagiem punktów z C, zbieznym do x. Tak wiec kazdy element $x \in C$ jest granica ciagu punktów y_n nalezacych do C ale róznych od x. Zbiór C jest wiec zbiorem w sobie gestym, a bedac jednoczesnie zbiorem domknietym jest wiec zbiorem doskonalym. cbdo.

Zbierajac dowiedzione wyzej lematy mozemy sformulowac

TWIERDZENIE 10.A
C jest ograniczonym, domknietym i w sobie gestym (a wiec doskonalym) i brzegowym podzbiorem przedzialu [0, 1].

DEFINICJA 10.A
Zbiór domkniety, ograniczony, brzegowy i doskonaly nazywany jest **zbiorem Cantora**.

Trójkowy zbiór Cantora C jest wiec zbiorem Cantora.

TWIERDZENIE 10.B
C jest zbiorem nieprzeliczalnym mocy continuum.

Dowód.
Potraktujmy punkty odcinka [0, 1] jako liczby rzeczywiste. Zastanówmy sie, jak wygladaja rozwiniecia tych liczb w systemie trójkowym, w którym dostepnymi cyframi sa 0, 1 i 2.

Niech $0.\,t_1\,t_2\,t_3\,...$ bedzie rozwinieciem trójkowym liczby x. Wtedy,

$$x = \sum t_i\, 3^{-i}, \quad (10.D)$$

gdzie sumowanie przeprowadzone jest po wszystkich cyfrach rozwiniecia.
Czy kazda liczba posiada jedno rozwiniecie?
Niekoniecznie. Jesli na przyklad, liczba x posiada rozwiniecie, w którym wszystkie kolejne cyfry powyzej cyfry t_n ($\neq 0$) sa zerami, to liczbe te mozemy tez zapisac jako:

$$0.\,t_1\,t_2\,t_3\,...t_{n-1}\,(t_n-1)\;2\;2\;2\;2\;2\;... \quad (10.E)$$

Na przyklad, x=0.1000... mozna tez zapisac jako 0.022222...
Spójrzmy na kolejne kroki konstrukcji Cantora z punktu widzenia zapisu liczbowego.
Usuniecie z odcinka [0, 1] jego srodkowej (jednej trzeciej) czesci oznacza, iz usunelismy wszystkie liczby, których pierwsza cyfra rozwiniecia trójkowego jest jedynka. Usuwany przedzial jest otwarty, co oznacza, ze liczba x=0.1000... stanowiaca jego brzeg nie powinna zostac usunieta. Istotnie mozna tego uniknac, bowiem jak to wspomnielismy wyzej, liczbe te mozna tez zapisac jako 0,0222...a wiec mimo zakazu uzycia 1 jako pierwszej cyfry rozwiecia pozostaje ona w zbiorze I_1.
Pierwszy krok geometrycznej konstrukcji zbioru Cantora mozna wiec zinterpretowac jako „*zakaz uzycia* 1 *jako pierwszej cyfry rozwiniecia trójkowego*".
Podobnie, drugi krok geometrycznej konstrukcji Cantora mozemy zinterpretowac jako „*zakaz uzycia* 1 *jako drugiej cyfry rozwiniecia trójkowego.*"
W granicy dochodzimy do „*zakazu uzycia* 1 *na jakimkolwiek miejscu rozwiniecia trójkowego*".
Tak wiec, zbiór Cantora okazuje sie byc „*Zbiorem wszystkich liczb z odcinka [0, 1], które daja sie zapisac w rozwinieciu trójkowym bez uzycia 1.*"
Zauwazmy, ze wykluczenie cyfry 1 z zapisu liczbowego usuwa tez wszelkie dwuznacznosci rozwiniec. Kazda liczba ze zbioru Cantora ma jedno i tylko jedno

rozwiniecie trójkowe – i nie ma w nim ani jednej 1-ki.

Przedzialy P wchodzace w sklad zbiorów I beda mialy teraz nastepujacy opis:

$I_1 = P_{11} \cup P_{12}$,
P_{11}=[0,000....., 0.0222...],
P_{12}=[0.2000..., 0.222.....]

$I_2 = P_{21} \cup P_{22} \cup P_{23} \cup P_{24}$,
P_{21}=[0,000......., 0.00222..],
P_{22}=[0.02000..., 0.0222....]
P_{23}=[0,2000....., 0.20222..],
P_{24}=[0.22000..., 0.222......]
.
.
.
Niech $t_1\, t_2\, t_3 \ldots t_n$ bedzie dowolnym, skonczonym ciagiem cyfr 0 i 2.
Czy 0. $t_1\, t_2\, t_3 \ldots t_n$ jest liczba nalezaca do C?
Tak. Jest to liczba reprezentujaca punkt bedacy punktem brzegowym któregos ze zbiorów P wystepujacych na kolejnych etapach konstrukcji zbioru C. (Wszystkie punkty brzegowe pozostaja w C!)
Niech $t_1\, t_2\, t_3 \ldots t_n \ldots$ bedzie nieskonczonym, ale periodyczym ciagiem cyfr 0 i 2.
Czy 0. $t_1\, t_2\, t_3 \ldots t_n \ldots$ jest liczba nalezaca do C?
Tak. I jest to równiez liczba reprezentujaca którys z punktów brzegowych.
Niech $t_1\, t_2\, t_3 \ldots t_n \ldots$ bedzie nieskonczonym i nieperiodyczym ciagiem cyfr 0 i 2.
Czy 0. $t_1\, t_2\, t_3 \ldots t_n \ldots$ jest liczba nalezaca do C?
Tak. Ale liczba ta nie reprezentuje zadnego z punktów brzegowych.
Punktów zbioru Cantora, które sa reprezentowane przez nieskonczone i nieperiodyczne rozwiniecia trójkowe jest najwiecej. (To dzieki nim, zbiór Cantora jest zbiorem nieprzeliczalnym.)
Podsumujmy.
Kazdy punkt ze zbioru Cantora jest reprezentowany przez jedno i tylko jedno rozwiniecie trójkowe, w którym na zadnym miejscu nie pojawia sie 1.
I odwrotnie.
Kazdemu, skonczonemu lub nie ciagowi cyfr 0 i 2 interpretowanemu jako rozwiniecie trójkowe liczby odpowiada jeden i tylko jeden punkt zbioru Cantora.
Jesli w rozwinieciach trójkowych liczb ze zbioru Cantora zamienimy wszystkie cyfry 2 na 1 i powstale rozwiniecia zinterpretujemy jako rozwiniecia dwójkowe, to dojdziemy do odwzorowania zbioru Cantora na caly odcinek [0, 1]. Zauwazmy, ze przy tej zamianie pewne pary punktów zbioru Cantora sa odwzorowywane na ten sam punkt odcinka [0, 1]. Np. punkty 0.2000... i 0.0222... sa odwzorowywane na punkty 0.1000 i 0.0111..., ale 0.0111...=0.1000...Jak latwo sprawdzic, parami tymi sa punkty lezace na brzegach odcinków wylaczanych w procedurze geometrycznej konstrukcji zbiory Cantora.
Zbiór Cantora i odcinek domkniety [0, 1] sa równej mocy – c.
Jedna z bardziej osobliwych cech trójkowego zbioru Cantora jest jego wymiar. Podajmy definicje jego najprostszej postaci:

DEFINICJA 10.B
Wymiarem pojemnosciowym zbioru S zanurzonego w D–wymiarowej przestrzeni Euklidesowej R^D, nazywamy granice:

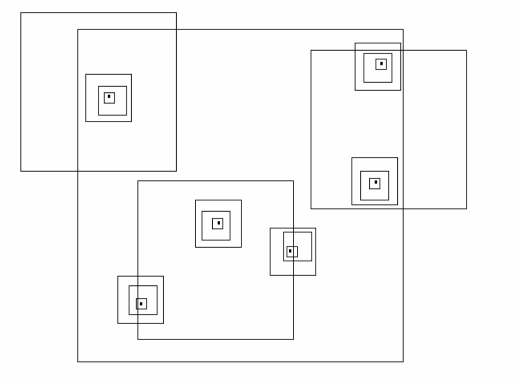
$$d = \lim_{\varepsilon \to 0} [\ln N(\varepsilon)]/[\ln (1/\varepsilon)],$$

gdzie $N(\varepsilon)$ jest liczba D–wymiarowych kostek (odpowiednio: odcinków, kwadratów, szescianów, itd) o dlugosci boku ε potrzebnych do pokrycia zbioru S.

PRZYKLADY.

Zbadajmy wymiar pojemnosciowy dwu prostych podzbiorów plaszczyzny euklidesowej R^2.

a. Skonczony izolowanych zbiór punktów plaszczyzny $S = \{P_1, P_2, \ldots, P_M\}$.

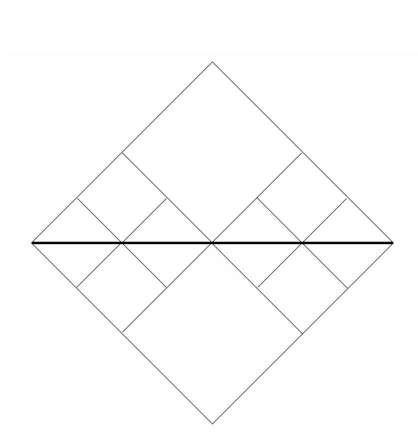


Rys. 10-B Zbiór S sklada sie z pieciu punktów. Jesli ε jest dostatecznie duze, do pokrycia calego zbioru potrzeba tylko jednego kwadratu o boku ε. Przy zmniejszajacym sie ε liczba kwadratów niezbednych do pokrycia S wzrasta, lecz gdy ε jest dostatecznie male, do pokrycia zbioru S potrzeba zawsze dokladnie pieciu kwadratów.

Oznaczmy, przez $L_{\min}$ najkrótsza z odleglosci miedzy punktami ze zbioru S. Jesli $\varepsilon < L_{\min}/\sqrt{2}$, to do pokrycia zbioru S musimy uzyc $N(\varepsilon) = M$ kwadratów o boku ε. Liczba ta pozostaje stala przy $\varepsilon \to 0$. W efekcie mamy

$$d = \lim_{\varepsilon\to 0} [\ln N(\varepsilon)]/[\ln (1/\varepsilon)] = \lim_{\varepsilon\to 0} [\ln M]/[\ln (1/\varepsilon)] = 0.$$

b. Odcinek [0, 1].

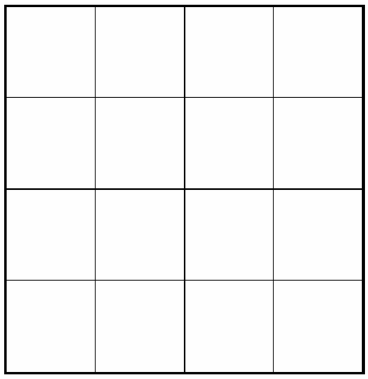


Rys. 10-C Najbardziej efektywne pokrycia odcinka [0, 1] kwadratami o bokach $\varepsilon = \delta/\sqrt{2}$, gdzie $\delta = 1/n$, $n = 1, 2, 3$.

Jak to jasno wynika z rysunku, liczba $N(\varepsilon)$ kwadratów o boku $\varepsilon = \delta/\sqrt{2}$, gdzie $\delta = 1/n$, potrzebnych do pokrycia calego odcinka wynosi n. Stad:

$$d = \lim_{\varepsilon\to 0} [\ln N(\varepsilon)]/[\ln (1/\varepsilon)] = \lim_{n\to\infty} [\ln n]/[\ln (n\sqrt{2})] = 1.$$

c. Kwadrat [0, 1] × [0, 1].



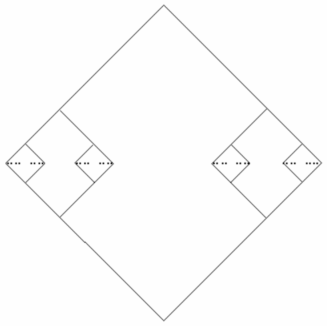
Rys. 10-D Najbardziej efektywne pokrycia kwadratu o boku 1 kwadratmi o bokach 1, 1/2 i 1/4.

Rysunek przekonuje, ze liczba $N(\varepsilon)$ kwadratów o boku ε , gdzie $\varepsilon = 1/n$, potrzebnych do pokrycia calego kwadratu wynosi n^2. Stad:

$$d = \lim_{\varepsilon\to 0} [\ln N(\varepsilon)]/[\ln (1/\varepsilon)] = \lim_{n\to\infty} [\ln n^2]/[\ln n] = \lim_{n\to\infty} [2 \ln n]/[\ln n] = 2.$$

Otrzymane wyniki pokrywaja sie z tym, co mówi nam intuicja: zbiór zlozony ze skonczonej liczby punktów, obiektów o wymiarze 0, sam jest 0-wymiarowy; wymiar odcinka wynosi 1 zas kwadratu 2.

Spytajmy teraz o wymiar zbioru trójkowego Cantora C.



Rys. 10-E Najbardziej efektywne pokrycia trójkowego zbioru Cantora kwadratami o bokach $1/3^n\sqrt{2}$, $n = 1, 2, 3$.

Zbiór ten powstal z odcinka [0, 1], jednak przy jego pokrywaniu kwadratami mozemy postepowac oszczedniej niz w przypadku odcinka, bowiem wiemy, ze w zbiorze tym sa szczeliny, których nie musimy pokrywac. Wiemy na przyklad, ze w przedziale otwartym (1/3, 2/3), nie ma zadnych punktów zbioru *C*, przedzial ten mozemy wiec pominac w procedurze pokrywania. Starajac sie zachowac jak najwieksza oszczednosc mozemy wiec uzyc do pokrywania zbioru *C* kwadratów o boku $\varepsilon = 1/3\sqrt{2}$ kladac je tak, jak to pokazalismy na rysunku: wystarcza 2 kwadraty o tym rozmiarze (pokrycie calego odcinka wymagaloby 3). Jesli bok kwadratów uzywanych do pokrycia skrócimy do $1/(9\sqrt{2})$, to wystarcza ich 4 (do pokrycia calego odcinka [0, 1] musielibysmy uzyc 9 kwadratów o tej wielkosci).
W ogólnosci, jesli bok kwadratów wynosi $1/(3^n\sqrt{2})$, to do pokrycia zbioru Cantora wystarczy 2^n z nich (pokrycie calego odcinka [0, 1] wymagaloby 3^n). Mamy wiec,

$$d = \lim_{\varepsilon\to 0} [\ln N(\varepsilon)]/[\ln (1/\varepsilon)] =$$

$$\lim_{n\to\infty} [\ln 2^n]/[\ln 3^n\sqrt{2}] =$$

$$\lim_{n\to\infty} (n \ln 2)/(n \ln 3 + \ln \sqrt{2}) =$$

$$= \ln 2/\ln 3 \approx 0.63...$$

Otrzymany wynik jest dosc nieoczekiwany: wymiar trójkowego zbioru Cantora jest ulamkowy.