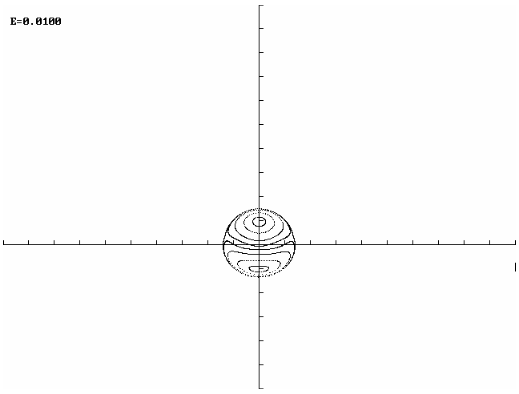
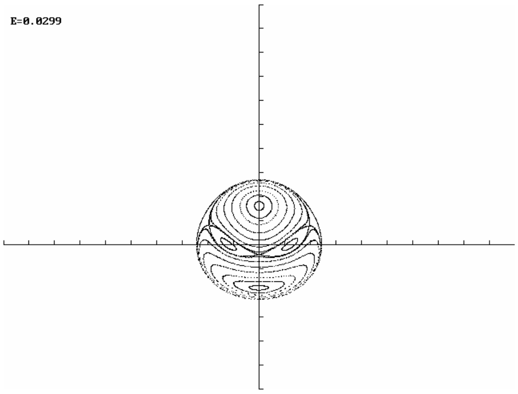
18. PRZEKROJE POINCAREGO PRZESTRZENI FAZOWEJ CZ¥STKI HENONA-HEILESA

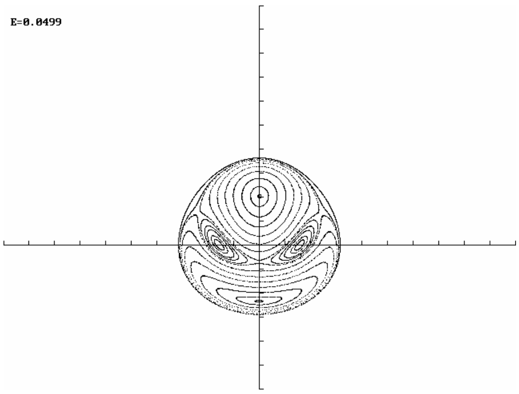
Przestrzen fazowa ukladu H-H jest czterowymiarowa: (x, y, p_x, p_y).
Zdefiniowane w niej powierzchnie stalych energii:

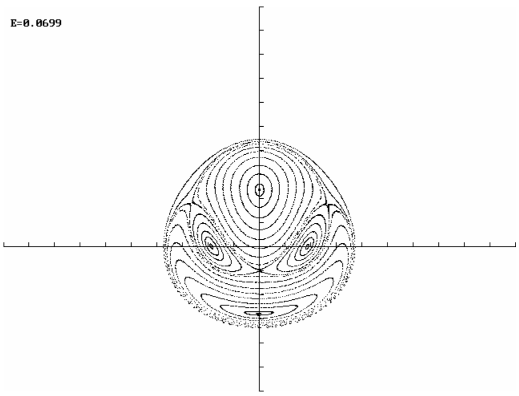
(18.A) $\quad K(p_x, p_y) + U(x, y) = E$

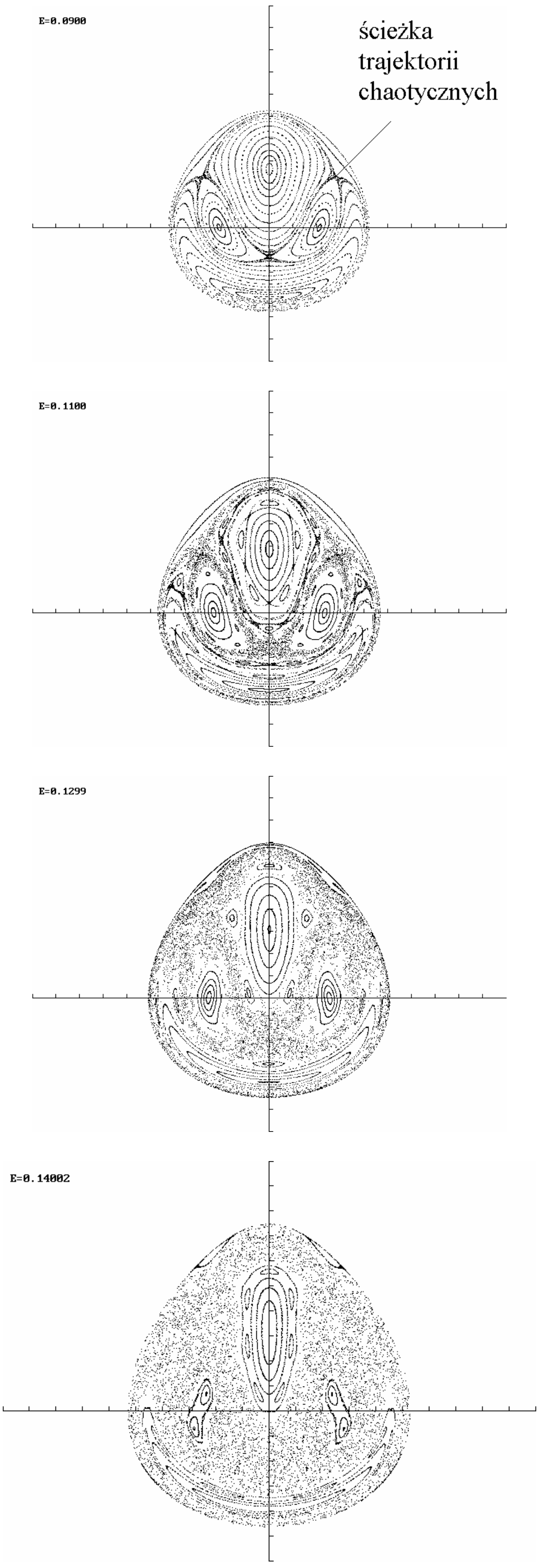
sa rozmaitosciami trójwymiarowymi, co powoduje, ze dla pelnego opisu dowolnej trajektorii wystarczy podac bieg jej trzech wspólrzednych np. $x(t)$, $y(t)$, $p_y(t)$, bowiem czwarta $p_x(t)$ bedzie juz zdeterminowana warunkiem stalosci energii (18.a). Trójwymiarowa przestrzen (x, y, p_y), w której wykreslany jest bieg trajektorii, mozemy przeciac plaszczyzna np. o równaniu x=0. Przeciecie to, zwane przekrojem Poincare sprowadza nas na plaszczyzne (y, p_y). Punkty, w których trajektoria czastki przebija te plaszczyzne, jednoznacznie determinuja jej bieg. Jesli bowiem zadamy wartosci y i p_y, to z definicji przekroju x=0, zas v_x mozemy obliczyc z warunku stalosci energii (18.a).
Przedstawione nizej rysunki prezentuja przekroje Poincare przestrzeni fazowej czastki H-H dla kilku wybranych wartosci jej energii. Technika ich wykonania jest nastepujaca:
Przy ustalonej wartosci E energii calkowitej czastki:
1. Wybieramy w plaszczyznie (y, p_y) dowolny punkt $y(0)$, $p_y(0)$.
2. Przyjmujac $x(0)$=0 obliczamy z warunku (18.a) wartosc zmiennej $v_x(0)$.
3. Ustalone wartosci $x(0)$, $y(0)$, $p_x(0)$, $p_y(0)$ przyjmujemy jako wspólrzedne punktu poczatkowego trajektorii, której bieg wyznaczamy calkujac numerycznie równania ruchu czastki. Na plaszczyznie (y, p_y) wykreslamy punkty trajektorii, dla których $x(t)$=0, a wiec te punkty, w których przebija ona plaszczyzne (y, p_y).
Powyzsza procedura prowadzi do wykreslenia na plaszczyznie (y, p_y) ksztaltu przekroju tej rozmaitosci, po której porusza sie zainicjowana trajektoria. Jesli rozmaitosc ta jest topologicznie równowazna torusowi, to w plaszczyznie przekroju Poincarego, wykreslane punkty zaznacza krzywa topologicznie równowazna okregowi.











Rys. 18-A Przekroje Poincare powierzchni stalej energii w przestrzeni fazowej ukladu Henona-Heilesa.
E = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 0.11, 0.13 i 0.15.

Jak widac z rys. 18-a, dla malych wartosci energii, trajektorie czastki kraza po powierzchniach topologicznie równowaznych torusowi. Analiza przekroju narysowanego dla E=0.9, ujawnia, ze prócz trajektorii, które poruszaja sie po tak prostych powierzchniach, istnieja trajektorie, których bieg jest znacznie bardziej zlozony, bowiem ich przebicia z plaszczyzna (y, p_y) zaznaczaja nie krzywe zamkniete, lecz zbiory o niezerowej mierze powierzchniowej. Pole pokrywanego przez nich przekroju zwieksza sie wraz z E i przy E=0.15 to one sa regula a trajektorie regularne wyjatkiem. Zauwazmy, ze trajektorie regularne, biegnace po powierzchniach równowaznych topologicznie torusowi i trajektorie chaotyczne, biegnace w zbiorach o znacznie bardziej zlozonej strukturze, wspólistnieja na powierzchni stalej energii. To czy, czastka bedzie poruszala sie ruchem regularnym, czy chaotycznym, zalezy w tym wypadku od wyboru warunków poczatkowych. Zauwazmy tez, ze w jednym przekroju Poincarego, moze istniec (i istnieje) wiecej niz jedna sciezka trajektorii chaotycznych – tym, co je rozdziela, sa powierzchnie zachowan regularnych.