

16. PORZADEK I CHAOS W UKŁADACH HAMILTONOWSKICH

Z punktu widzenia fizyki N -wymiarowym **układem dynamicznym** jest każdy układ fizyczny, którego:

1. **stan** opisany jest N zmiennymi – oznaczmy je x_1, x_2, \dots, x_N ,
2. **ewolucja** opisana jest układem N równan różniczkowych zwyczajnych:

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_N), \\ dx_2/dt &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_N), \\ &\dots \\ dx_N/dt &= f_N(x_1, x_2, \dots, x_N), \end{aligned}$$

N zmiennych niezależnych x_1, x_2, \dots, x_N może reprezentować tu dowolne wielkości fizyczne takie jak: położenia, pędy, kąty, ciśnienie, temperatura

Wśród układów dynamicznych jednymi z najstarszych i najlepiej zbadanych są **układy Hamiltonowskie**.

Dla układów tych N jest parzyste: $N=2n$.

n zmiennych, oznaczanych zazwyczaj jako q_1, q_2, \dots, q_n , określanych jest jako **położenia uogólnione**.

n pozostałych zmiennych, oznaczanych jako p_1, p_2, \dots, p_n , określanych jest jako **pędy uogólnione**.

Ewolucja układu Hamiltonowskiego opisana jest N równaniami, mającymi postać:

$$\begin{aligned} dq_1/dt &= \partial H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n) / \partial p_1 \\ dq_2/dt &= \partial H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n) / \partial p_2 \\ &\dots \\ dq_n/dt &= \partial H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n) / \partial p_n \\ dp_1/dt &= - \partial H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n) / \partial q_1 \\ dp_2/dt &= - \partial H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n) / \partial q_2 \\ &\dots \\ dp_n/dt &= - \partial H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n) / \partial q_n \end{aligned}$$

Funkcja $H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$, której znajomość pozwala na sformułowanie równań ruchu układu, nazywana jest jego **Hamiltonianem**.

Zmienne q_k i p_k nazywane są **położeniami i pedami sprzęzonymi**, w skrócie: **zmiennymi sprzęzonymi**.

Rozważmy najprostszy przykład hamiltonowskiego układu dynamicznego. Jest nim cząstka o masie m

poruszająca się bez tarcia w n -wymiarowej jamie potencjału

$$(16.A) \quad U(q_1, q_2, \dots, q_n),$$

gdzie q_1, q_2, \dots, q_n oznaczają współrzędne kartezjańskie położenia cząstki. Sprawdźmy, że istotnie równania ruchu można w tym przypadku sprowadzić do podanej wyżej postaci.

k -ta składowa siły działającej na cząstkę równa jest :

$$(16.B) \quad F_k = - \partial U / \partial q_k.$$

k -ta składowa newtonowskiego równania ruchu:

$$(16.C) \quad m a_k = F_k$$

gdzie $a_k = dv_k/dt$ oznacza k -tą składową przyspieszenia, można więc zapisać jako:

$$(16.D) \quad m dv_k/dt = - \partial U / \partial q_k.$$

Jeśli przypomnimy sobie, że związek między pędem a prędkością dany jest wzorem:

$$(16.E) \quad mv_k = p_k$$

to równanie to przechodzi w

$$(16.F) \quad dp_k/dt = - \partial U / \partial q_k$$

Energia kinetyczna cząstki wynosi:

$$(16.G) \quad K = mv_1^2/2 + mv_2^2/2 + \dots + mv_n^2/2$$

co można zapisać jako:

$$(16.H) \quad K(p_1, p_2, \dots, p_n) = p_1^2/2m + p_2^2/2m + \dots + p_n^2/2m,$$

skąd k -ta składowa prędkości cząstki można określić jako:

$$(16.I) \quad dq_k/dt = p_k/m = \partial K / \partial p_k.$$

Podsumowując powyższe fakty łatwo zauważyć, że jeśli zdefiniujemy funkcję Hamiltona $H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$ jako:

$$(16.J) \quad H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = K(p_1, p_2, \dots, p_n) + U(q_1, q_2, \dots, q_n),$$

a więc jako sumę energii kinetycznej i potencjalnej cząstki, to równania (16.f) i (16.h) można zapisać jako:

$$(16.K) \quad \begin{aligned} dq_k/dt &= \partial H / \partial p_k, \\ dp_k/dt &= - \partial H / \partial q_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

a więc mają one zadaną postać.

Cecha układów hamiltonowskich jest to, iż podczas ich ewolucji określonej równaniami ruchu wartość funkcji Hamiltona $H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$ pozostaje stała. Aby przekonać się o tym, sprawdzmy wartość jej pochodnej po czasie:

$$\begin{aligned} dH/dt &= \sum (\partial H / \partial q_k) (dq_k/dt) + \\ &\sum (\partial H / \partial p_k) (dp_k/dt) = \\ &\sum (\partial H / \partial q_k) (-\partial H / \partial q_k) + \\ &\sum (\partial H / \partial p_k) (\partial H / \partial p_k) = 0. \end{aligned}$$

Jeśli więc, tak jak jest to w przypadku cząstki w jamie potencjału, funkcja Hamiltona oznacza całkowitą energię układu, to podczas ewolucji określonej równaniami ruchu energia ta pozostaje stała – jest **całką ruchu**. Tak więc, z fizycznego punktu widzenia, jeśli funkcja Hamiltona układu jest jego całkowitą energią, to jest to układ zachowawczy.

Poszukiwanie rozwiązań równań ruchu układu Hamiltonowskiego można spróbować uprościć przez odpowiednią zamianę zmiennych.

Jeśli przy przejściu do nowych zmiennych, oznaczmy je $Q_1, Q_2, \dots, Q_n, P_1, P_2, \dots, P_n$, równania ruchu nie zmieniają swej formy, w tym sensie, że ich prawe strony znów dają się wyrazić przez odpowiednie pochodne cząstkowe funkcji Hamiltona, to transformacje prowadzące od starych zmiennych do nowych nazywamy **transformacją kanoniczną**.

Równania ruchu wyrażone w nowych zmiennych mogą okazać się prostsze. Jest tak, gdy po zamianie zmiennych funkcja H okaże się być niezależna od jednej, lub więcej nowych zmiennych. Przyjmijmy na przykład, że H nie zależy od Q_n . Wtedy,

$$(16.L) \quad dP_n/dt = -\partial H / \partial Q_n = 0,$$

a więc,

$$(16.M) \quad P_n(t) = P_n(0) = \text{const}$$

Zmienna P_n pozostaje stała wzdłuż trajektorii ruchu, jest więc **całką ruchu**.

Idealny przypadek zachodzi wtedy, gdy funkcja Hamiltona wyrażona w nowych zmiennych ma postać $H(P_1, P_2, \dots, P_n)$, tzn. **nie zależy od zmiennych Q_1, Q_2, \dots, Q_n** . (Mówimy wtedy, że układ został sprowadzony do **postaci normalnej**.) Dla wszystkich $k = 1, 2, \dots, n$ zachodzą wtedy równości:

$$(16.N) \quad \partial H / \partial Q_k = 0,$$

a więc

$$(16.O) \quad dP_k/dt = 0$$

skąd

$$(16.P) \quad P_k(t) = P_k(0) = \text{const} = C_k.$$

Wszystkie zmienne P_1, P_2, \dots, P_n pozostają stałe podczas ewolucji układu, są więc jego całkami ruchu.

A zmienne Q_k ?

Dla nich, $k = 1, 2, \dots$, zachodzi:

$$(16.Q) \quad dQ_k/dt = \partial H / \partial P_k.$$

Ze względu na to, iż H jest wyłącznie funkcją zmiennych P_1, P_2, \dots, P_n , te zaś podczas ewolucji układu pozostają stałe i równe odpowiednio C_1, C_2, \dots, C_n , mamy:

$$(16.R) \quad \partial H / \partial P_k = \omega_k(P_1, P_2, \dots, P_n) =$$

$$\omega_k(C_2, \dots, C_n), k=1, 2, \dots, n.$$

Równania (16.q) przybierają więc postać:

$$(16.S) \quad dQ_k/dt = \omega_k(C_2, \dots, C_n),$$

gdzie $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ są stałymi, co sprawia, że ich rozwiązania są szczególnie proste:

$$(16.T) \quad Q_k(t) = \omega_k t + D_k.$$

Zmienne P_k nazywane są **działaniami**,

zmienne Q_k – **katami**,

a stałe ω_k – **częstotliwościami**.

C_k i D_k są stałymi całkowania. Stałych tych jest $2n$.

Podsumowując. Jeśli możliwe jest przejście do postaci normalnej, to równania ruchu dają się rozwiązać explicite, a rozwiązania mają szczególnie prostą postać:

$$(16.U) \quad P_k(t) = C_k.$$

$$(16.V) \quad Q_k(t) = \omega_k t + D_k, k = 1, 2, \dots, n.$$

Układ, dla którego udaje się dokonać przejścia do postaci normalnej, nazywany jest **układem całkowalnym**.

PRZYKŁAD.

Rozważmy układ n mas $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ zawieszonych do wspólnej belki na sprężynach o współczynnikach sprężystości $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$. Oznaczmy przez $h_i, i=1, 2, 3, \dots, n$, położenie i -tej masy.

Newtonowskie równania ruchu układu mają postać:

$$(16.W) \quad m_i \, d^2 h_i / dt^2 = -k_i \, m_i.$$

Podstawienia:

$$(16.X) \quad q_i = h_i$$

$$(16.Y) \quad p_i = m_i \, dh_i / dt$$

pozwalają zapisać całkowitą energię układu w postaci

$$(16.Z) \quad H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = \\ (1/2) \sum (k_i \, q_i^2 + p_i^2 / 2m)$$

Oczywiście, nie jest to postać normalna. Postać normalna możemy jednak łatwo uzyskać podstawiając:

$$(16.AA) \quad q_i = \mu^{-1} (2P_i)^{1/2} \sin Q_i,$$

$$(16.BB) \quad p_i = \mu (2P_i)^{1/2} \cos Q_i,$$

gdzie

$$(16.CC) \quad \mu = (k_i \, m_i)^{1/4}.$$

wtedy bowiem

$$(16.DD) \quad H = \sum \omega_i P_i,$$

gdzie

$$(16.EE) \quad \omega_i = (k_i / m_i)^{1/2}.$$

Intuicyjny sens powyższego przykładu jest prosty. Każda z n zawieszonych mas stanowi niezależny oscylator harmoniczny. Trajektoria ruchu każdego z nich będzie elipsa w przestrzeni (q_i, p_i) . Jeśli współrzędne te odpowiednio przeskalujemy, przyjmując jako nowe współrzędne μq_i oraz $\mu^{-1} p_i$, to każda z tych elips przejdzie w okrąg a punkt reprezentujący w przestrzeni $(\mu q_i, \mu^{-1} p_i)$ i-ty układ będzie poruszał się po tym okręgu ze stałą prędkością kątową. Równania (16.aa) i (16.bb) definiują współrzędne biegunowe, w których ruch znajduje szczególnie prosty opis.

Zauważmy, iż w przypadku ogólnym, w którym sprężyny, na których zawieszone są masy m_i są nieliniowe, częstotliwości ω_i będą zależne od amplitudy drgań, tzn. $k_i = k_i(P_i)$.

W układzie całkowalnym trajektoria w $2n$ wymiarowej przestrzeni fazowej jest ograniczona do n -wymiarowej podprzestrzeni zdefiniowanej

równościami $P_1 = C_1, P_2 = C_2, \dots, P_n = C_n$. Jaki jest jej kształt?

Wartości zmiennych Q_i ewoluują zgodnie z równaniami (16.v). Zauważmy, że zmienne te są cykliczne tzn. gdy Q_i zmienia się o 2π , układ powraca do stanu wyjściowego. Można stwierdzić, że w tym przypadku trajektoria porusza się więc po n -wymiarowym torusie: częstotliwości ω_i , z jakimi punkt reprezentujący stan układu obiega jego koliste przekroje są od siebie niezależne i w ogólności są różne od siebie. Zauważmy, że jeśli jednak częstotliwości są współmierne, tzn. stnieją takie liczby całkowite l_1, l_2, \dots, l_n , dla których:

$$(16.FF) \quad l_1 \omega_1 + l_2 \omega_2 + \dots + l_n \omega_n = 0$$

to w skończonym czasie trajektoria powróci do punktu początkowego. Jeśli relacja ta nie jest spełniona, to trajektoria nigdy nie powraca do punktu początkowego i gęsto pokrywa n -torus.