

Metoda VFO i jej zastosowanie do sterowania potrójnym integratorem

Maciej Michałek i Krzysztof Kozłowski

Katedra Sterowania i Inżynierii Systemów
Politechnika Poznańska
Piotrowo 3a, 60-965 Poznań

{maciej.michalek/krzysztof.kozlowski}@put.poznan.pl

Streszczenie. Artykuł przedstawia koncepcję projektowania sterowania metodą VFO dedykowaną oryginalnie dla podklasy systemów nieholonomicznych. Przedstawiono opis poszczególnych etapów projektowych metody dla układów z trójwymiarowym wektorem stanu oraz sposób i skutki zastosowania nowej koncepcji do modelu potrójnego integratora jako przykładu systemu spoza oryginalnej podklasy. Treść artykułu ma stanowić próbę częściowej odpowiedzi na pytanie o zakres stosowalności metody VFO.

1 Wprowadzenie

Koncepcja sterowania zwana *metodą orientowania pól wektorowych* (w skrócie: VFO od słów angielskich *Vector Field Orientation*) została wprowadzona i jest rozwijana przez autorów od roku 2004 ([6]). Oryginalnie koncepcja ta powstała z przeznaczeniem do realizacji zadań sterowania dla podklasy bezdryfowych systemów nieholonomicznych o dwóch sterowaniach i z wyróżnionym jednym podstawowym polem wektorowym (generatorem). Metoda orientowania pól wektorowych wynika z prostej i intuicyjnej interpretacji geometrycznej związanej z postacią pól wektorowych modelu rozważanego systemu oraz z potencjalną ewolucją tego systemu w odpowiedzi na specyficznie zaprojektowane sygnały wejściowe. Do dnia dzisiejszego pozytywne wyniki teoretyczne związane z realizacją zadań śledzenia i stabilizacji metodą VFO oraz potwierdzenie symulacyjne tych wyników uzyskano dla kilku systemów o trójwymiarowym wektorze stanu takich, jak: wózek jednokołowy (przedstawiono również wyniki eksperymentalne), manipulator planarny z przekładniami nieholonomicznymi oraz system łańcuchowy [5]. We wszystkich przypadkach uzyskano asymptotyczną zbieżność błędów sterowania oraz dobrą dynamiczną jakość w stanach przejściowych (szybkie i nieoscylacyjne zanikanie stanów przejściowych niezależnie od warunków początkowych i rodzaju sygnałów referencyjnych). Szczególną własnością zaproponowanych praw sterowania jest prostota ich parametrycznej syntezy, co ma duże znaczenie praktyczne. Próbując zaklasyfikować metodę VFO w świetle już istniejących rozwiązań, należy zaliczyć ją do grupy metod nieciągłych (odcinkami ciągłych) o charakterze geometrycznym (przykłady innych metod z tej grupy można znaleźć w [2], [4], [1]) w odróżnieniu od metod ciągłych, których przegląd dla układów nieholonomicznych zawiera między innymi praca [7].

W perspektywie dotychczasowych wyników pojawia się naturalne pytanie o zakres stosowalności metodyki VFO. W szczególności interesujące wydaje się rozważenie możliwości wykorzystania koncepcji VFO do systemów o odmiennych właściwościach dynamicznych w porównaniu z pierwotną grupą bezdryfowych układów nieholonomicznych. Próbą częściowej odpowiedzi na pytanie o zakres stosowalności proponowanej koncepcji jest niniejszy artykuł, w którym metoda VFO będzie wykorzystana do wyprowadzenia sterownika VFO dla modelu potrójnego integratora. Z tego względu, iż potrójny integrator można zaliczyć do grupy *klasycznych* obiektów liniowych, dla którego istnieją *klasyczne* prawa sterowania, celem niniejszej pracy jest przede wszystkim ukazanie możliwości i sposobu wykorzystania metody VFO w tym przypadku. Zaskakujący wydaje się fakt, iż uzyskane prawo sterowania VFO dla modelu potrójnego integratora odpowiada znanemu z literatury sterownikowi liniowemu, przy czym analiza geometryczna przeprowadzona w oparciu o koncepcję VFO pozwala ukazać ten znany wynik w nowym geometrycznym świetle. Autorzy wierzą, iż zastosowanie wspólnej koncepcji projektowej VFO dla tak różnych jakościowo systemów jak bezdryfowe układy nieholonomiczne i dryfowe systemy holonomiczne (jakim jest potrójny integrator) może stanowić próbę unifikacji podejścia do problemu projektowania sterowania dla tych systemów, a także próbę znalezienia cech wspólnych wspomnianych dynamik – cech kluczowych dla realizacji podstawowych zadań sterowania.

2 Metoda VFO

Istotę metody VFO przedstawimy na przykładzie modeli bezdryfowych systemów nieholonomicznych o trójwymiarowym wektorze stanu, gdyż geneza koncepcji sterowania z orientowaniem pól wektorowych wywodzi się z analizy własności tych systemów. Rozważmy zatem rodzinę systemów Σ :

$$\Sigma : \dot{\mathbf{q}}(\tau) \triangleq \mathbf{g}_1 u_1(\tau) + \mathbf{g}_2(\mathbf{q}(\tau)) u_2(\tau), \quad \mathbf{g}_1 \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{q}(\tau)) \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ g_2(\mathbf{q}(\tau)) \\ g_3(\mathbf{q}(\tau)) \end{bmatrix} \quad (1)$$

gdzie $\mathbf{q}(\tau) = [q_1(\tau) \ q_2(\tau) \ q_3(\tau)]^T \in \mathbb{R}^3$ jest wektorem stanu, a $u_1(\tau), u_2(\tau) \in \mathbb{R}$ są sterującymi sygnałami wejściowymi. Wprowadźmy podprzestrzeń stanu $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^3$ (definicja zbioru \mathcal{Q} zależy od rozważanego systemu), w której założymy spełnienie następujących postulatów:

- P1. system (1) jest sterowalny (spełnia warunek LARC¹)
- P2. pole $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$ jest regularne: $\forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q} \ \|\mathbf{g}_2(\mathbf{q})\| \neq 0$
- P3. pole $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$ jest ograniczone: $\forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}: \|\mathbf{q}\| < \infty \ \|\mathbf{g}_2(\mathbf{q})\| < \infty$
- P4. pole $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$ jest funkcją pierwszej zmiennej stanu: $\frac{\partial \mathbf{g}_2(\mathbf{q})}{\partial q_1} \neq \mathbf{0}$ i w konsekwencji jest *orientowalne* w \mathbb{R}^3 .

Wprowadźmy także pojęcie pola wektorowego zbieżności² $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3$, które określone w każdym punkcie \mathbf{q} jako wektor $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \cdot)$ definiuje chwilowy kierunek zbieżności do trajektorii bądź punktu referencyjnego $\mathbf{q}_t = [q_{1t} \ q_{2t} \ q_{3t}]^T \in \mathbb{R}^3$ (w zależności od definicji

¹ Lie Algebra Rank Condition

² W trakcie rozważań ogólnych nie podajemy jawnej definicji pola \mathbf{h} .

zadania sterowania). Pojęcie *kierunek zbieżności* należy rozumieć jako pożądany kierunek ewolucji systemu (1) w przestrzeni \mathcal{Q} prowadzący do realizacji zadania sterowania (czyli do zbieżności $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}_t$).

Rozważmy charakterystyczne cechy geometryczne oraz potencjalną ewolucję systemu (1) w podprzestrzeni \mathcal{Q} . Zwróćmy najpierw uwagę, iż pole \mathbf{g}_1 w modelu (1) jest stałe (jest to pole wyróżnione), co implikuje liniową zależność pochodnej pierwszej zmiennej stanu od sterowania: $\dot{q}_1 = u_1$. Co więcej, ewolucja tej zmiennej jest odsprężniona od ewolucji pozostałych zmiennych stanu. Z drugiej strony natomiast zmienne q_2 i q_3 zależą w sposób liniowy od sterowania u_2 , a ich ewolucja przebiega zawsze wzdłuż chwilowego kierunku wektora $\mathbf{g}_2^*(\mathbf{q}) = [g_2(\mathbf{q}) \ g_3(\mathbf{q})]^T \in \mathbb{R}^2$, co wynika z oczywistej zależności geometrycznej:

$$Dir(\dot{\mathbf{q}}^*) \equiv Dir(\mathbf{g}_2^*(\mathbf{q})), \quad \text{gdzie} \quad \dot{\mathbf{q}}^* \triangleq \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_2^*(\mathbf{q}) \triangleq \begin{bmatrix} g_2(\mathbf{q}) \\ g_3(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

a $Dir(\mathbf{b})$ oznacza kierunek wektora³ \mathbf{b} w \mathbb{R}^2 . Skoro pole $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$ jest funkcją zmiennej q_1 (zgodnie z postulatem P4), to chwilowa wartość q_1 determinuje chwilowy kierunek (i chwilową orientację) wektora $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$ w \mathbb{R}^2 . Tym samym można nazwać ją *zmienną orientującą*. Ze względu na postać pierwszego równania w (1), sterowanie u_1 będzie nosić nazwę *sterowania orientującego*. Skoro ewolucja zmiennych q_2, q_3 przebiega wzdłuż pola \mathbf{g}_2^* i proporcjonalnie do u_2 , to w interpretacji geometrycznej można powiedzieć, że sterowanie u_2 *popycha* stan $\mathbf{q}^* = [q_2 \ q_3]^T$ wzdłuż pola \mathbf{g}_2^* . Sterowanie to zatem nazywane jest *sterowaniem popychającym*. Zgodnie z powyższą interpretacją system (1) możemy zdekomponować na dwa podsystemy dynamiczne:

$$\Sigma_1 : \dot{q}_1 = u_1, \quad \Sigma_2^* : \dot{\mathbf{q}}^* = \mathbf{g}_2^*(\mathbf{q})u_2. \quad (3)$$

Jeśli teraz na podobnej zasadzie przeprowadzimy dekompozycję pola zbieżności:

$$\mathbf{h} \triangleq [h_1 \ \mathbf{h}^{*T}]^T, \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{h}^* \triangleq [h_2 \ h_3]^T \in \mathbb{R}^2, \quad (4)$$

to strategię sterowania VFO można przedstawić następująco. Skoro \mathbf{h}^* definiuje kierunek zbieżności dla podwektora stanu \mathbf{q}^* w \mathbb{R}^2 , a jednocześnie zmienna q_1 determinuje chwilową orientację (kierunek) pola \mathbf{g}_2^* , to wystarczy tak oddziaływać na zmienną orientującą (za pomocą sterowania u_1), aby nakładać chwilowy kierunek (orientację) wektora $\mathbf{g}_2^*(\mathbf{q})$ na kierunek (orientację) wektora zbieżności $\mathbf{h}^*(\mathbf{q})$ i jednocześnie za pomocą sterowania u_2 popychać stan \mathbf{q}^* , aby zapewnić zbieżność zmiennych q_2 oraz q_3 do ich wartości referencyjnych. Uzasadnionym wydaje się tzw. *popychanie ostrożne*, co oznacza, iż prędkość ewolucji zmiennych q_2, q_3 winna być proporcjonalna do ortogonalnego rzutu chwilowego wektora zbieżności $\mathbf{h}^*(\mathbf{q})$ na bieżący kierunek $\mathbf{g}_2^*(\mathbf{q})$ i może być maksymalna tylko przy pełnej zgodności kierunków obu wektorów. Matematycznie powyższą strategię możemy zapisać za pomocą następujących relacji:

$$\begin{aligned} u_1(\tau) & : \quad \mathbf{g}_2^*(\mathbf{q}(\tau))k(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{h}^*(\mathbf{q}(\tau), \cdot) \\ u_2(\tau) & : \quad \|\dot{\mathbf{q}}^*(\tau)\| \propto \|\mathbf{h}^*(\mathbf{q}(\tau), \cdot)\| \cos \alpha(\tau), \end{aligned} \quad (5)$$

³ Kierunek pola \mathbf{b} w danym punkcie \mathbf{q} jest reprezentowany za pomocą nieskierowanego kąta $\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$ określonego pomiędzy wektorem $\mathbf{b}(\mathbf{q})$ a wybranym wektorem odniesienia. Natomiast orientację pola \mathbf{b} w danym punkcie \mathbf{q} należy utożsamiać z kątem skierowanym $\alpha \in (-\pi, \pi]$ występującym pomiędzy wektorem $\mathbf{b}(\mathbf{q})$ a wybranym wektorem odniesienia.

gdzie $k(\tau)$ jest pewną niezerową funkcją skalarną pozwalającą na kształtowanie strategii procesu popychania (*przodem/tyłem*), \propto jest operatorem proporcjonalności, natomiast $\alpha(\tau) = \angle(\mathbf{g}_2^*(\mathbf{q}(\tau)), \mathbf{h}^*(\mathbf{q}(\tau), \cdot)) \in (-\pi, \pi]$, a τ jest zmienną czasu. Przedstawiona wyżej koncepcja sterowania nie zapewnia w ogólności zbieżności zmiennej orientującej q_1 do jej wartości referencyjnej q_{1t} . Zbieżność dla zmiennej orientującej q_1 można zapewnić poprzez odpowiednią konstrukcję pola \mathbf{h} . Uwzględniając pomocniczą funkcję, którą odgrywa zmienna q_1 w procesie orientowania pola \mathbf{g}_2 , postać pola zbieżności winna gwarantować spełnienie następującej relacji:

$$\mathbf{h} : q_1(\tau) \xrightarrow{q^* \rightarrow q_t^*} q_{1t}(\tau), \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{q}_t^* = [q_{2t} \ q_{3t}]^T \in \mathbb{R}^2. \quad (6)$$

Powyższą zależność należy rozumieć jako postulat płynnego przechodzenia od procesu orientowania do procesu śledzenia dla zmiennej q_1 , gdy stan \mathbf{q}^* zbiega w okolicę trajektorii \mathbf{q}_t^* . Zauważmy, że powyższy postulat dopuszcza chwilowe powiększanie błędu $e_1 = q_{1t} - q_1$ w przypadku gdy stan \mathbf{q}^* znajduje się daleko od trajektorii \mathbf{q}_t^* , co stanowi jedną z kluczowych cech strategii VFO. Konkretna postać pola \mathbf{h} spełniająca postulat (6) zależy od modelu sterowanego systemu.

Zgodnie z rozważaniami zawartymi w [5] proces projektowania sterownika VFO można podzielić na pięć podstawowych etapów:

- E1. określenie podprzestrzeni $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^3$ w której spełnione są postulaty P1-P4,
- E2. wyprowadzenie na podstawie pierwszej relacji z (5) tzw. *warunków orientowania* gwarantujących nakładanie kierunku \mathbf{g}_2^* na kierunek definiowany polem $\mathbf{h}^* = [h_2 \ h_3]^T$,
- E3. wprowadzenie sygnałów pomocniczych dla każdego z wyprowadzonych warunków orientowania z etapu E2: $q_{ia}(\mathbf{h}^*)$ oraz $e_{ia}(\tau) = q_{ia}(\mathbf{h}^*) - q_i(\tau)$ pozwalających na spełnienie *warunków orientowania* poprzez sprowadzenie pomocniczych błędów $e_{ia}(\tau)$ do zera,
- E4. konstrukcja pola zbieżności

$$\mathbf{h} \triangleq \begin{bmatrix} h_1(q_{1a}, \cdot) \\ \mathbf{h}^*(\mathbf{q}_t^*, \mathbf{q}^*, \cdot) \end{bmatrix} \quad \text{taka, że:} \quad q_{ia}(\mathbf{h}^*) \rightarrow q_{it} \quad \text{dla} \quad \mathbf{q}^* \rightarrow \mathbf{q}_t^*, \quad (7)$$

- E5. zdefiniowanie sterowania orientującego u_1 i sterowania popychającego u_2 :

$$\mathbf{u}_{\text{VFO}} : \begin{cases} u_1 \triangleq h_1 \\ u_2 \triangleq k_2(\mathbf{q}) \mathbf{g}_2^{*T} \mathbf{h}^*, \quad k_2(\mathbf{q}) \triangleq \frac{1}{\|\mathbf{g}_2^*(\mathbf{q})\|^2} \end{cases} \quad (8)$$

zapewniających:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e_{ia}(\tau) = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} [\mathbf{q}_t^*(\tau) - \mathbf{q}^*(\tau)] = 0. \quad (9)$$

Przykładami systemów bezdryfowych, do których może zostać zastosowana opisana wyżej strategia sterowania są między innymi: wózek jednokołowy (Σ_{UMR}) oraz

system łańcuchowy (Σ_{NHCS}), których modele przedstawiają poniższe równania⁴:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \stackrel{\Sigma_{\text{UMR}}}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos q_1 \\ \sin q_1 \end{bmatrix} u_2, \quad \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \stackrel{\Sigma_{\text{NHCS}}}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ q_1 \end{bmatrix} u_2. \quad (10)$$

Prześledźmy krótko poszczególne etapy projektowe metody VFO. Łatwo zauważyć, że oba systemy spełniają postulaty P1-P4 dla $\mathcal{Q} = \mathbb{R}^3$. W obu modelach można wyróżnić tylko jedną zmienną orientującą q_1 , której wartość determinuje kierunek wektora $\mathbf{g}_2(\mathbf{q}) = \mathbf{g}_2(q_1)$. Skorzystanie z pierwszej relacji w (5) w przypadku obu powyższych modeli prowadzi do uzyskania tzw. *warunków orientowania* dla poszczególnych systemów wiążących zmienne orientujące z polem zbieżności \mathbf{h}^* w następujący sposób:

$$\Sigma_{\text{UMR}} : \lim_{\tau \rightarrow \infty} [q_1(\tau) - \text{Atan2c}(\text{sgn}(k)h_3, \text{sgn}(k)h_2)] = 0 \quad (11)$$

$$\Sigma_{\text{NHCS}} : \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[q_1(\tau) - \frac{h_3}{h_2} \right] = 0 \quad (12)$$

gdzie $\text{Atan2c}(\cdot, \cdot) \in \mathbb{R}$ jest uciągloną wersją czteroćwiartkowej funkcji $\text{Atan2}(\cdot, \cdot)$ oraz $\text{sgn}(k) \triangleq \pm 1$ (szczegółowe wyprowadzenie powyższych warunków można znaleźć w [5]). Aby spełnić warunki orientowania (11,12) wprowadza się zmienne pomocnicze

$$\Sigma_{\text{UMR}} : q_{1a}(\mathbf{h}^*) \triangleq \text{Atan2c}(\text{sgn}(k)h_3, \text{sgn}(k)h_2) \quad \text{dla } \mathbf{h}^* \neq \mathbf{0} \quad (13)$$

$$\Sigma_{\text{NHCS}} : q_{1a}(\mathbf{h}^*) \triangleq h_3/h_2 \quad \text{dla } h_2 \neq 0 \quad (14)$$

oraz błędy pomocnicze $e_{1a}(\tau) = q_{1a}(\mathbf{h}^*) - q_1(\tau)$. Od tej pory realizacja procesu orientowania polega na sprowadzaniu pomocniczych błędów $e_{1a}(\tau)$ do zera za pomocą sterowania orientującego u_1 . Teoretycznie istnieje wiele możliwości zdefiniowania pola zbieżności \mathbf{h} . Nasza propozycja definicji dla zadania śledzenia trajektorii w przypadku obu systemów wynika z ważonej kombinacji liniowej odpowiednich błędów i sygnałów prędkościowych (traktowanych jako sprzężenie wyprzedzające):

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ \mathbf{h}^* \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} k_1 e_{1a} + \dot{q}_{1a} \\ k_p \mathbf{e}^* + \dot{\mathbf{q}}_t^* \end{bmatrix}, \quad (15)$$

gdzie $\dot{q}_{1a} = dq_{1a}/d\tau$, $\mathbf{e}^* = \mathbf{q}_t^* - \mathbf{q}^*$, $\dot{\mathbf{q}}_t^* = [\dot{q}_{2t} \ \dot{q}_{3t}]^T$, a $k_1, k_p > 0$ są parametrami projektowymi sterownika. Należy zauważyć, że definicje (13,14) wraz z (15) spełniają warunek zbieżności postulowany w (7). Ostatni etap projektowy wymaga podstawienia odpowiednich wyrażeń zdefiniowanych dla poszczególnych systemów Σ_{UMR} oraz Σ_{NHCS} do ogólnego wzoru (8). W wyniku otrzymujemy następujące sterowanie VFO:

$$u_1 = k_1 e_{1a} + \dot{q}_{1a} \quad (16)$$

$$u_2 = \begin{cases} h_2 \cos q_1 + h_3 \sin q_1 & \text{dla } \Sigma_{\text{UMR}} \\ \frac{1}{1+q_1^2} (h_2 + h_3 q_1) & \text{dla } \Sigma_{\text{NHCS}}, \end{cases} \quad (17)$$

⁴ W równaniu systemu łańcuchowego dokonano zamiany kolejności zmiennych stanu w stosunku do modelu oryginalnego (por. [3]), aby uzyskać postać zgodną z (1).

które gwarantują zbieżność (9) oraz wobec (7) także zbieżność dla zmiennej orientującej: $q_1(\tau) \rightarrow q_{1t}(\tau)$.

Charakterystycznymi cechami układów sterowania VFO są: gwarancja dobrej jakości sterowania w stanach przejściowych reprezentowana szybką i nieoscylacyjną zbieżnością uchybów oraz naturalnym zachowaniem się sterowanego systemu w przestrzeni konfiguracyjnej, intuicyjna (geometryczna) interpretacja składników sterowania oraz wyjątkowa prostota parametrycznej syntezy sterowników VFO (mała wrażliwość jakości sterowania na wartości parametrów projektowych oraz na warunki początkowe systemu i rodzaj sygnałów referencyjnych). Dalsze szczegóły dotyczące uzyskanych wyników zbieżności, a także postaci sterowników VFO dla zadania stabilizacji można znaleźć między innymi w pracy [5].

Powyższe rozważania miały na celu zarysowanie metody VFO oraz przedstawienie sposobu projektowania praw sterowania VFO w oparciu o dwa wybrane przykłady systemów z rodziny Σ . W następnym rozdziale rozważony zostanie problem zastosowania przedstawionej powyżej metodyki VFO do wyprowadzenia prawa sterowania dla systemu spoza oryginalnej rodziny Σ , mianowicie dla układu potrójnego integratora.

3 Metoda VFO dla potrójnego integratora

Wprowadzenie nowej metody sterowania jest związane z naturalnym pytaniem o zakres stosowalności proponowanej koncepcji. Jak dotąd nie udało się określić warunków dostatecznych stosowalności metody VFO. Oryginalnie, metoda została wprowadzona dla systemów z podklasy Σ , jednak okazuje się, że jej stosowalność nie jest ograniczona do wspomnianego zbioru systemów. Poniższe rozważania mają na celu zastosowanie metody projektowej VFO do wyprowadzenia sterowania dla liniowego systemu z dryfem w postaci potrójnego integratora. Procedura wykorzystania koncepcji VFO zostanie przeprowadzona poprzez analogię do systemów bezdryfowych.

Rozważmy model potrójnego integratora: $\ddot{x} = u$, gdzie $x, u \in \mathbb{R}$. Wprowadzając zmienne stanu fazowe: $x_1 := x$, $x_2 := \dot{x}$, $x_3 := \ddot{x}$, i dokonując zamiany kolejności zmiennych $q_1 := x_3$, $q_2 := x_2$, $q_3 := x_1$ model systemu przyjmuje postać:

$$\Sigma_{\text{TI}} : \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{g}_1 u_1 + \mathbf{g}_2(\mathbf{q}) \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \cdot 1, \quad (18)$$

w którym (w odniesieniu do podklasy systemów Σ z (1)), przyjęto interpretację dryfu jako iloczynu pola-generatora $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$ i wirtualnego sterowania $u_2 \equiv 1$. W takiej interpretacji możemy stwierdzić, że struktura modelu systemu Σ_{TI} może zostać potraktowana jako szczególny przypadek modeli systemów podklasy Σ ze stałym drugim sygnałem sterującym. Strategia VFO może zatem w tym przypadku zostać zastosowana prawie analogicznie, jak dla systemów Σ z tą różnicą, że proces *popychania* będzie tutaj zachodzić ze stałą intensywnością oraz jedynie w strategii *do przodu*⁵ (brak wpływu na wartość i znak wirtualnego sterowania $u_2 \equiv +1$).

⁵ Zaznaczmy, że system (18) należy do klasy układów holonomicznych.

3.1 Zadanie sterowania

Zdefiniujmy zadanie sterowania, które chcemy rozwiązać metodą VFO dla systemu (18). Niech dana będzie trajektoria referencyjna stanu $\mathbf{q}_t(\tau) = [q_{1t}(\tau) \ q_{2t}(\tau) \ q_{3t}(\tau)]^T \in \mathbb{R}^3$ będąca rozwiązaniem równania (18) dla pewnego $u_{1t}(\tau) \in \mathcal{L}_\infty$. Gdy $u_{1t} \equiv 0$ oraz $q_{1t}(0), q_{2t}(0) \equiv 0$ trajektoria $\mathbf{q}_t(\tau)$ przyjmuje postać stałego punktu referencyjnego $\mathbf{q}_t = [0 \ 0 \ q_{3t}]^T$. Zadaniem sterowania będzie stabilizacja w zerze błędu $\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ e_3]^T = \mathbf{q}_t(\tau) - \mathbf{q}(\tau)$ dla ograniczonych sygnałów referencyjnych $\mathbf{q}_t(\tau)$.

3.2 Prawo sterowania VFO dla systemu Σ_{T1}

Z postaci modelu (18) wynika, że występują tutaj dwie zmienne orientujące: q_1 oraz q_2 . Zmienna q_1 jest bezpośrednio sterowana poprzez sygnał u_1 , a druga zmienna orientująca pozostaje w całkowitej relacji ze zmienną sterowaną bezpośrednio: $q_2(\tau) = q_2(0) + \int_0^\tau q_1(\xi) d\xi$ i tym samym również podlega sterowaniu jednak w sposób pośredni. Łatwo sprawdzić, iż system (18) spełnia postulaty P1, P3, P4. Spełnienie postulatu P2 nie jest konieczne w przypadku systemu Σ_{T1} , ponieważ wirtualne sterowanie popychające $u_2 \equiv 1$ nie wymaga dobrego określenia funkcji $k_2(\mathbf{q})$ występującej w definicji (8). Przywołanie ogólnych relacji (5) pozwala na realizację etapu projektowego E2 i daje dla systemu (18) (przy założeniu $k(\tau) := +1$) następujące warunki orientowania:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} q_1(\tau) - h_2(\mathbf{q}(\tau), \cdot) \\ q_2(\tau) - h_3(\mathbf{q}(\tau), \cdot) \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \text{gdzie} \quad \begin{bmatrix} q_1(\tau) \\ q_2(\tau) \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{g}_2^*(\mathbf{q}). \quad (19)$$

Zgodnie z etapem E3 metodyki VFO definiujemy zmienne pomocnicze q_{ia} oraz błędy pomocnicze e_{ia} :

$$\begin{aligned} q_{1a}(\tau) &\triangleq h_2(\mathbf{q}(\tau), \cdot), & e_{1a}(\tau) &\triangleq q_{1a}(\tau) - q_1(\tau), \\ q_{2a}(\tau) &\triangleq h_3(\mathbf{q}(\tau), \cdot), & e_{2a}(\tau) &\triangleq q_{2a}(\tau) - q_2(\tau). \end{aligned} \quad (20)$$

Sprowadzanie powyższych błędów do zera implikuje nakładanie kierunku pola $\mathbf{g}_2^*(\mathbf{q})$ na kierunek pola zbieżności $\mathbf{h}^* = [h_2 \ h_3]^T$, co w połączeniu z ustawicznym *popychaniem*⁶ gwarantuje zbieżność zmiennych q_2 i q_3 . Ściślej rzecz biorąc zbieżność zmiennych q_3, q_2 a także zbieżność zmiennej q_1 do ich wartości referencyjnych q_{3t}, q_{2t} i q_{1t} zależy bezpośrednio od postaci pola zbieżności \mathbf{h} , które determinuje ewolucję całego systemu w stanach przejściowych. Skupmy zatem uwagę na konstrukcji pola \mathbf{h} . Skoro zmienna q_3 nie bierze udziału w procesie orientowania pola $\mathbf{g}_2^*(\mathbf{q})$, to współrzędna h_3 pola zbieżności winna wskazywać *kierunek* zbieżności do sygnału referencyjnego $q_{3t}(\tau)$. Zaproponujemy następujący wybór:

$$h_3(e_3, \dot{q}_{3t}) \triangleq k_3 e_3(\tau) + \dot{q}_{3t}(\tau), \quad (21)$$

gdzie $k_3 > 0$ jest współczynnikiem projektowym, a sygnał wyprzedzający $\dot{q}_{3t}(\tau) = \dot{q}_{2t}(\tau)$ zgodnie z modelem (18). Pozostałe zmienne q_2 i q_1 są odpowiedzialne za orientowanie pola $\mathbf{g}_2^*(\mathbf{q})$, zatem w stanach przejściowych winny zmierzać do wartości pomocniczych (20). Proponujemy wybór następujących definicji współrzędnych h_2 i h_1

⁶ W tym przypadku termin *popychanie* należy rozumieć jako *dryfowanie*.

wektora zbieżności:

$$\begin{aligned} h_2(e_{2a}, \dot{q}_{2a}) &\triangleq k_2 e_{2a}(\tau) + \dot{q}_{2a}(\tau), & \text{gdzie} & \quad \dot{q}_{2a}(\tau) \stackrel{(20)}{=} \dot{h}_3(e_3, \dot{q}_{3t}), \\ h_1(e_{1a}, \dot{q}_{1a}) &\triangleq k_1 e_{1a}(\tau) + \dot{q}_{1a}(\tau), & \text{gdzie} & \quad \dot{q}_{1a}(\tau) \stackrel{(20)}{=} \dot{h}_2(e_{2a}, \dot{q}_{2a}), \end{aligned} \quad (22)$$

a $k_2, k_1 > 0$ są parametrami projektowymi. W tym momencie możemy zaproponować postać sterowania orientującego u_1 , które zapewni zbieżność błędów (20) do zera. Przywołując ogólną definicję sterowania orientującego z etapu E5 metodyki VFO otrzymujemy:

$$u_1 \triangleq h_1 \stackrel{(22)}{=} k_1 e_{1a}(\tau) + \dot{q}_{1a}(\tau). \quad (23)$$

Sprawdźmy jakość sterowania w układzie zamkniętym z systemem (18) i sterownikiem (23).

Podstawiając (23) do (18) łatwo sprawdzić, że błąd $e_{1a}(\tau)$ będzie zmierzał wykładniczo do zera dla $\tau \rightarrow \infty$. Zbieżność błędu $e_{2a}(\tau)$ wynika z faktu, iż $\ddot{q}_2 = \dot{q}_1 = u_1$ (por. (18)) i z następującej analizy:

$$\ddot{q}_2 \stackrel{(23)}{=} k_1(q_{1a} - q_1) + \dot{q}_{1a} \stackrel{(20)}{=} k_1(h_2 - \dot{q}_2) + \dot{h}_2 \stackrel{(22)}{=} k_1(k_2 e_{2a} + \dot{e}_{2a}) + k_2 \dot{e}_{2a} + \ddot{q}_{2a},$$

co po uporządkowaniu daje następujące równanie różniczkowe:

$$\ddot{e}_{2a} + (k_1 + k_2)\dot{e}_{2a} + k_1 k_2 e_{2a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_{2a}(\tau) = 0.$$

Warto zauważyć, że przebieg $e_{2a}(\tau)$ ma charakter nieoscylacyjny $\forall k_{1,2} > 0$. Ze zbieżności błędów e_{1a} oraz e_{2a} wnioskujemy, że sterowanie (23) gwarantuje nałożenie kierunku pola g_2^* na kierunek pola zbieżności h^* .

Rozważmy teraz przebieg błędu $e_3(\tau)$. Łatwo pokazać, że sterowanie (23) jest równoważne postaci

$$u_1 = (k_1 + k_2 + k_3)\ddot{e}_3 + (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)\dot{e}_3 + k_1 k_2 k_3 e_3 + \ddot{q}_{3t} \quad (24)$$

co po podstawieniu do modelu (18) i wykorzystaniu faktu, że $\dot{q}_1 = \ddot{q}_3$ daje następujące równanie różniczkowe:

$$\ddot{e}_3 + (k_1 + k_2 + k_3)\dot{e}_3 + (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)e_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_3(\tau) = 0.$$

Zwróćmy uwagę, że także w tym przypadku zbieżność błędu $e_3(\tau)$ jest nieoscylacyjna dla dowolnych $k_{1,2,3} > 0$. Na podstawie równań (20), (21) oraz (22) można pokazać, że słuszne są następujące relacje:

$$\begin{aligned} \lim_{e_3 \rightarrow 0} h_2(e_{2a}(e_3), \dot{q}_{2a}) &= k_2 e_2(\tau) + \dot{q}_{2t}(\tau) \Rightarrow \ddot{e}_2 + (k_1 + k_2)\dot{e}_2 + k_1 k_2 e_2 = 0 \\ \lim_{e_3, e_2 \rightarrow 0} h_1(e_{1a}(e_2), \dot{q}_{1a}) &= k_1 e_1(\tau) + \dot{q}_{1t}(\tau) \Rightarrow \dot{e}_1 + k_1 e_1 = 0, \end{aligned}$$

co pozwala wnioskować o asymptotycznej zbieżności wszystkich błędów $e_3(\tau)$, $e_2(\tau)$ oraz $e_1(\tau)$ do zera dla $\tau \rightarrow \infty$ (w istocie zbieżność ta jest wykładnicza). Nietrudno sprawdzić, że wobec poczynionego założenia $u_{1t}(\tau) \in \mathcal{L}_\infty$ sterowanie VFO z (23) jest dobrze określone i ograniczone dla całej przestrzeni stanu $\mathcal{Q} = \mathbb{R}^3$. Powyższa analiza

pokazuje także, iż postać pola \mathbf{h} określona w (21,22) gwarantuje spełnienie warunku zbieżności z (7).

Prawo sterowania (23) przedstawione w postaci rozwiniętej w (24) jest klasycznym sterowaniem PDD² ze sprzężeniem wyprzedzającym. W odróżnieniu jednak od klasycznego sposobu uzyskiwania tego typu praw sterowania⁷, reguła (23) została wypracowana na drodze prostych interpretacji geometrycznych i systematycznego wykorzystania proponowanej metody VFO. Pociąga to za sobą pewne konsekwencje praktyczne oraz nowe, a w opinii autorów interesujące, interpretacje związane z powyższym wynikiem, które zostaną przeanalizowane w kolejnym rozdziale.

4 Interpretacje i uwagi

W celu przeprowadzenia geometrycznych interpretacji sterowania VFO zdefiniowanego w (23) (lub w (24)) przeprowadzona została próba symulacyjna ilustrująca realizację zadania śledzenia trajektorii $\mathbf{q}_t(\tau)$ dla $u_{1t}(\tau) := 1.5 \sin 2\tau$, horyzontu czasowego $\tau_h = 5$ [s] oraz dla warunków początkowych: $\mathbf{q}_t(0) = [0 \ 0.5 \ 1]^T$, $\mathbf{q}(0) = [6 \ -2 \ 4]^T$. Przyjęto następujące wartości parametrów sterownika VFO: $k_1 = 10$, $k_2 = 5$, $k_3 = 2$. Uzyskane wyniki przedstawiają rys. 1-4. Przebieg sterowania orientującego przedstawiono na rys. 2. Efektywność procesu orientowania ilustruje rys. 3 w postaci czasowego przebiegu kosinusa kąta zawartego pomiędzy polami \mathbf{g}_2^* oraz \mathbf{h}^* .

Zwróćmy najpierw uwagę, iż skoro zmienne q_1, q_2 są zmiennymi orientującymi, to ich podstawowym zadaniem jest orientowanie pola \mathbf{g}_2^* tak, aby zapewnić szybką zbieżność zmiennej q_3 do jej wartości referencyjnej. Zatem w początkowej fazie sterowania błędy e_1 oraz e_2 mogą nie zbiegać w otoczenie zera, co widać na rys. 1. Zbieżność ta następuje wtedy, gdy błąd e_3 znajdzie się dostatecznie blisko zera. Ta pomocnicza funkcja, którą spełniają zmienne orientujące w metodzie VFO skutkuje nieoscylacyjną ewolucją sygnału e_3 niezależnie od przyjętych wartości współczynników projektowych $k_i > 0$, $i = 1, 2, 3$. Cecha nieoscylacyjnej zbieżności stanowi własność sterowania metodą VFO⁸ i w dużej mierze zwalnia projektanta z konieczności strojenia sterownika (dobór współczynników k_i zapewniający wymaganą szybkość odpowiedzi systemu jest wyjątkowo prosty). Zasadność spełniania pomocniczej funkcji przez zmienne orientujące wynika z prostej fizycznej interpretacji zmiennych q_1, q_2 i q_3 . Mianowicie, gdyby potraktować q_3 jako sygnał pozycyjny, to zmienne q_2 i q_1 będą miały interpretację odpowiednio prędkości i przyspieszenia. W tym momencie intuicyjnym staje się wniosek, iż właśnie zmiana przyspieszenia i w konsekwencji zmiana prędkości winny w stanie przejściowym sprowadzać sygnał pozycyjny q_3 do przebiegu referencyjnego q_{3t} (przyspieszenie i prędkość determinują kierunek $\mathbf{g}_2^*(\mathbf{q})$) i dopiero w następnej kolejności winny w sposób ciągły zbiegać do sygnałów referencyjnych q_{2t} oraz q_{1t} . Taki scenariusz ewolucji systemu zapewnia zaproponowana w (21,22) postać pola zbieżności \mathbf{h} , którego elementy h_1 i h_2 zależą wprost od błędów pomocniczych e_{1a}, e_{2a} , nie zaś od błędów śledzenia e_1, e_2 .

⁷ Wynikającego głównie z manipulacji algebraicznych prowadzących do dopełnienia żądanej postaci równania różniczkowego uchybu.

⁸ Podobne wnioski dotyczą sterowników VFO zaproponowanych dla systemów nieholonomicznych (por. [5]).

Próba wymuszenia jednoczesnej zbieżności dla wszystkich błędów e_1, e_2 oraz e_3 jest w pewnym sensie sprzeczna z własnościami samego systemu Σ_{T1} i może skutkować dużą oscylacyjnością przebiegów (i tym samym większym kosztem energetycznym sterowania). Problem ten pojawia się w zagadnieniu syntezy optymalnej dla kwadratowego wskaźnika jakości. Aby przeanalizować kwestię wyboru elementów macierzy wag wskaźnika jakości dla systemu Σ_{T1} w zagadnieniu sterowania optymalnego, wprowadźmy pomocniczo następujące wielkości: błąd mieszany $e_a = [e_{1a} \ e_{2a} \ e_{3a}]^T$ oraz diagonalną macierz wag $\mathbf{W}_a = \text{diag}\{w_{ia}\} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, w_{ia} > 0, i = 1, 2, 3$. Zdefiniujmy dwa wskaźniki jakości jeden dla błędu śledzenia $e = [e_1 \ e_2 \ e_3]^T$, drugi dla błędu mieszanego:

$$J(e) \triangleq \int_0^\infty e^T \mathbf{W} e \, d\tau, \quad J_a(e_a) \triangleq \int_0^\infty e_a^T \mathbf{W}_a e_a \, d\tau, \quad (25)$$

gdzie macierz $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ jest dowolną macierzą dodatnio określoną. Można sprawdzić, że błąd śledzenia z błędem mieszanym wiąże następujące równanie:

$$e_a = \Gamma e, \quad \text{gdzie} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & (k_2 + k_3) & k_2 k_3 \\ 0 & 1 & k_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

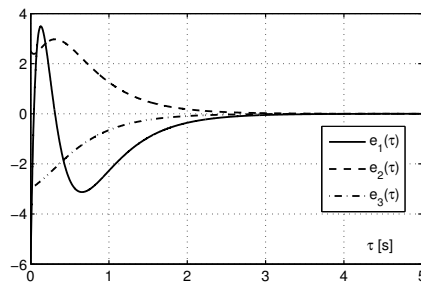
Analiza zbieżności dla elementów błędu mieszanego przeprowadzona w poprzednim rozdziale uzasadnia przyjęcie diagonalnej postaci macierzy wag \mathbf{W}_a . Załóżmy teraz, że synteza optymalna dla wskaźnika $J_a(e_a)$ została przeprowadzona i otrzymano minimalną wartość wskaźnika równą J_a^* . Chcielibyśmy w tym momencie sprawdzić dla jakiej macierzy wag \mathbf{W} wskaźnik $J(e)$ osiągnie wartość minimalną równą wartości J_a^* . Po podstawieniu (26) do definicji wskaźnika J_a otrzymamy, iż wartość minimalna $J^* = J_a^*$ dla $\mathbf{W} \triangleq \mathbf{W}_\Gamma = \Gamma^T \mathbf{W}_a \Gamma$ przy czym

$$\mathbf{W}_\Gamma = \begin{bmatrix} w_{1a} & w_{1a}(k_2 + k_3) & w_{1a}k_2k_3 \\ w_{1a}(k_2 + k_3) & w_{1a}(k_2 + k_3)^2 + w_{2a} & w_{1a}(k_2 + k_3)k_2k_3 + w_{2a}k_3 \\ w_{1a}k_2k_3 & w_{1a}(k_2 + k_3)k_2k_3 + w_{2a}k_3 & w_{1a}k_2^2k_3^2 + w_{2a}k_3^2 + w_{3a} \end{bmatrix}.$$

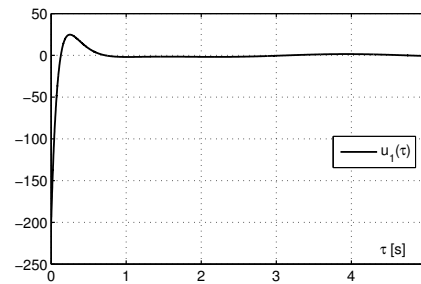
Zauważmy, iż powyższa macierz nie jest diagonalna dla dowolnych $w_{ia}, k_i > 0, i = 1, 2, 3$. Przyjmowanie zatem diagonalnej postaci macierzy wag \mathbf{W} w definicji wskaźnika $J(e)$, co jest powszechną praktyką ze względu na prostotę wyboru wag, nie zapewnia w rozważanym przypadku osiągnięcia minimum J_a^* . Można w kosekwencji stwierdzić, iż preferowanym wyborem zmiennych we wskaźniku jakości (25) są elementy błędu mieszanego e_a , ponieważ wybór diagonalnej macierzy wag jest tutaj wyjątkowo uzasadniony.

5 Podsumowanie

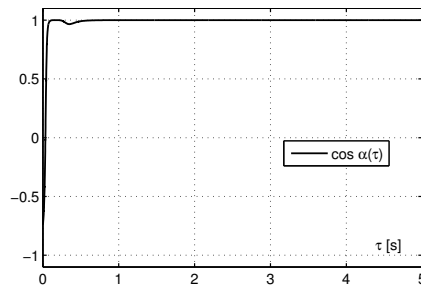
W artykule przedstawiono metodykę VFO projektowania sterowania oryginalnie dedykowaną dla podklasy bezdryfowych systemów nieholonomicznych. Poza tym przedstawiono także sposób i skutki wykorzystania metody VFO dla systemu spoza tej podklasy. Systematycznie wyprowadzony sterownik VFO dla rozważonego modelu potrójnego integratora odpowiada znanemu z literatury sterownikowi liniowemu, przy czym



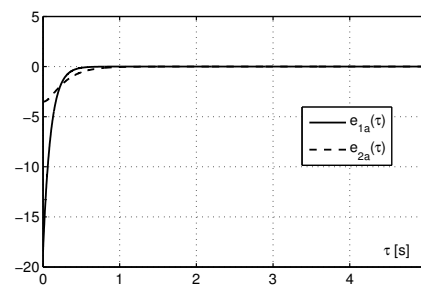
Rys. 1. Przebiegi błędów śledzenia



Rys. 2. Przebieg sygnału sterującego



Rys. 3. Przebieg procesu orientowania



Rys. 4. Przebiegi błędów pomocniczych

dotatkowo uzyskano gwarancję nieoscylacyjnej zbieżności błędów dla dowolnych dodatnich wartości współczynników projektowych. Autorzy są przekonani, iż przeprowadzone w pracy geometryczne interpretacje pozwoliły na ukazanie otrzymanych wyników w nowym świetle. Niniejsza praca ma stanowić kolejny krok w kierunku określenia zakresu stosowalności i stopnia uniwersalności prezentowanej metody VFO.

Literatura

1. M. Aicardi, G. Casalino, A. Bicchi, A. Balestrino. Closed loop steering of unicycle-like vehicles via Lyapunov techniques. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 2:27–35, 1995.
2. A. Astolfi. *Asymptotic stabilization of nonholonomic systems with discontinuous control*. Praca doktorska, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, 1996.
3. A. M. Bloch. *Nonholonomic mechanics and control*. Systems and Control. Springer, New York, 2003.
4. C. Canudas de Wit, O. J. Sørдалen. Exponential stabilization of mobile robots with nonholonomic constraints. *IEEE Transactions of Automatic Control*, 37:1791–1797, 1992.
5. M. Michałek. *Sterowanie metodą orientowania pól wektorowych dla podklasy systemów nieholonomicznych*. Praca doktorska, Politechnika Poznańska, Katedra Sterowania i Inżynierii Systemów, Poznań, 2006.
6. M. Michałek, K. Kozłowski. Sterowanie nieholonomicznym robotem mobilnym metodą orientowania pola wektorowego. K. Tchoń, redaktor, *Postępy Robotyki*, strony 235–246. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2005.
7. P. Morin, C. Samson. Trajectory tracking for non-holonomic vehicles: overview and case study. *Proceedings of the 4th International Workshop On Robot Motion and Control*, strony 139–153, Puszczykowo, 2004.