

# Kaskadowa metoda sterowania standardowym pojazdem N-przyczepowym z zastosowaniem algorytmu VFO

Seminarium naukowe KSIS  
Poznań, kwiecień 2011

Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2010-2012 jako projekt badawczy nr N N514 087038

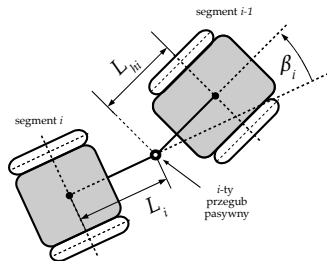
Maciej Michałek

Katedra Sterowania i Inżynierii Systemów  
Politechnika Poznańska

- 1 Wprowadzenie
- 2 Model kinematyki SPNP
- 3 Definicja zadania sterowania
- 4 Kaskadowa struktura sterowania
- 5 Zastosowanie metody VFO
- 6 Weryfikacja numeryczna
- 7 Uwagi końcowe

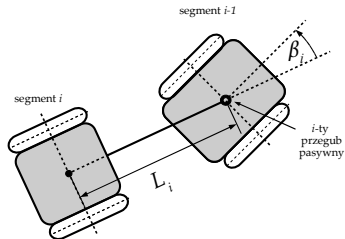
- 1 Wprowadzenie
- 2 Model kinematyki SPNP
- 3 Definicja zadania sterowania
- 4 Kaskadowa struktura sterowania
- 5 Zastosowanie metody VFO
- 6 Weryfikacja numeryczna
- 7 Uwagi końcowe

# Dwa sposoby pasywnego mocowania segmentów pojazdu



$$L_{hi} > 0$$

mocowanie pozaosiowe (pO)  
(ang. off-axle)



$$L_{hi} \equiv 0$$

mocowanie osiowe (O)  
(ang. on-axle)

## Konfiguracje pojazdów przegubowych N-przyczepowych:

- Ogólny Pojazd N-Przyczepowy (OPNP): ciągnik (monocykl) + pO/O + ... + pO + ... + pO/O
- Standardowy Pojazd N-Przyczepowy (SPNP): ciągnik (monocykl) + O + O + ... + O

## 1 Argumenty teoretyczne

- SPNP i OPNP trudnymi obiektami sterowania  
(nieliniowe, nieholonomiczne, niestabilne w ruchu tyłem)
- dla SPNP większość rozwiązań wynika transformacji modelu do postaci łańcuchowej  
(lokalność metody, potencjalne trudności w strojeniu sterownika – problem jakości sterowania w przestrzeni oryginalnej)
- szczególne trudności dla modelu OPNP  
(model nie jest linearyzowalny sprzężeniem zwrotnym dla  $N \geq 2$ , nieminimalnofazowość w ruchu przodem)
- otwarte problemy  
(sterowanie z ograniczeniami na stan, odporność, uniwersalność sterowników, sterowanie OPNP dla  $N \gg 1 \dots$ )

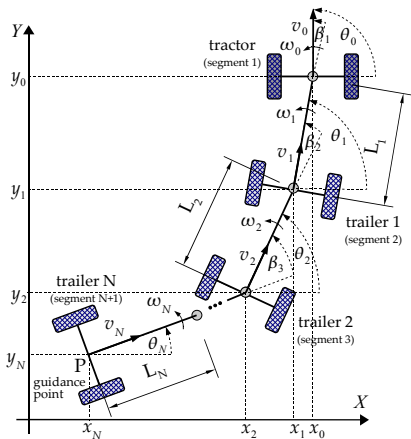
## 2 Argumenty praktyczne

- liczne zastosowania pojazdów przegubowych (w tym z przyczepami)
- manewry pojazdami przegubowymi – częste i uciążliwe w praktyce
- nieintuicyjne i złożone manewry pojazdami wielosegmentowymi

SPNP: Standardowy Pojazd N-Przyczepowy | OPNP: Ogólny Pojazd N-Przyczepowy

- 1 Wprowadzenie
- 2 Model kinematyki SPNP**
- 3 Definicja zadania sterowania
- 4 Kaskadowa struktura sterowania
- 5 Zastosowanie metody VFO
- 6 Weryfikacja numeryczna
- 7 Uwagi końcowe

# Standardowy pojazd N-przyczepowy: podstawowe definicje



Wektor konfiguracji pojazdu

$$\mathbf{q} = [\beta_1 \dots \beta_N \theta_N x_N y_N]^T \in \mathbb{R}^{N+3} \quad (1)$$

Wektor konfiguracji ostatniego segmentu

$$\bar{\mathbf{q}} = [\theta_N x_N y_N]^T \in \mathbb{R}^3 \quad (2)$$

Wektor wejść sterujących

$$\mathbf{u}_0 = [\omega_0 v_0]^T \in \mathbb{R}^2 \quad (3)$$

Punkt wyróżniony P (ang. guidance point)

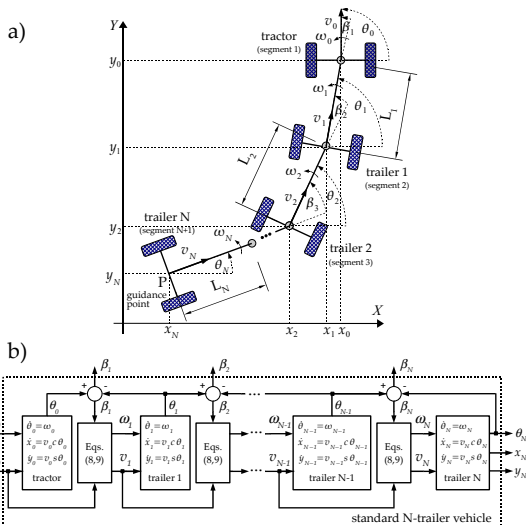
$$P = (x_N, y_N) \quad (4)$$

Współrzędne punktu P są wyjściami płaskimi modelu kinematyki

$L_i > 0, i = 1, \dots, N$  – długości przyczep

Wszystkie przyczepy mocowane osiowo (ang. *on-axle hitching*)  
⇒ standardowy pojazd/robot N-przyczepowy

# Rékurencyjna (kaskadowa) postać modelu SPNP



Równania kinematyki w postaci rekurencyjnej:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i, \quad (5)$$

$$\dot{x}_i = v_i \cos \theta_i, \quad (6)$$

$$\dot{y}_i = v_i \sin \theta_i, \quad (7)$$

$$\omega_i = \frac{1}{L_i} v_{i-1} \sin \beta_i, \quad (8)$$

$$v_i = v_{i-1} \cos \beta_i \quad (9)$$

$$\beta_i = \theta_{i-1} - \theta_i. \quad (10)$$

$\omega_i, v_i$  – wirtualne sterowania  $i$ -tego segmentu

a) szkielet kinematyczny pojazdu/robota, b) schemat modelu w postaci kaskadowej

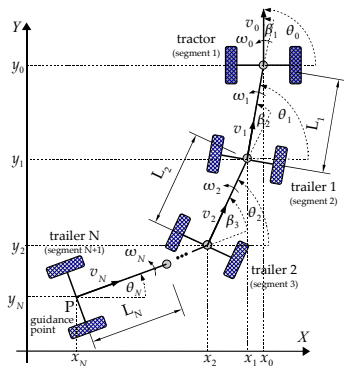


$$\begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\beta}_i \\ \vdots \\ \dot{\theta}_N \\ \dot{x}_N \\ \dot{y}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \omega_0 + \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1} \sin \beta_1 \\ \frac{1}{L_1} \sin \beta_1 - \frac{1}{L_2} \sin \beta_2 \cos \beta_1 \\ \vdots \\ \left( \prod_{j=1}^{i-2} \cos \beta_j \right) \left( \frac{1}{L_{i-1}} \sin \beta_{i-1} - \frac{1}{L_i} \sin \beta_i \cos \beta_{i-1} \right) \\ \vdots \\ \left( \prod_{j=1}^{N-1} \cos \beta_j \right) \frac{1}{L_N} \sin \beta_N \\ \left( \prod_{j=1}^N \cos \beta_j \right) \cos \theta_N \\ \left( \prod_{j=1}^N \cos \beta_j \right) \sin \theta_N \end{bmatrix} v_0 \quad (11)$$

↓

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{g}_1 \omega_0 + \mathbf{g}_2(\mathbf{q}) v_0 = \mathbf{S}(\mathbf{q}) \mathbf{u}_0 \quad (12)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}) = [\mathbf{g}_1 \ \mathbf{g}_2(\mathbf{q})], \quad \mathbf{u}_0 = [\omega_0 \ v_0]^T$$



- sterowalny w krótkim czasie\* (spełnia LARC)
- silnie nieliniowy
- nieholonomiczny:
 
$$\dot{x}_i \sin \theta_i - \dot{y}_i \cos \theta_i = 0, \quad \forall i \in [0, N]$$

$$\text{DOF} = \dim(\mathbf{q}) - (N + 1) = N + 3 - N - 1 = 2$$
- ubogi w sterowanie:
 
$$\dim(\mathbf{q}) - \dim(\mathbf{u}_0) = n - m = N + 3 - 2 = N + 1$$
- osobliwy\*\*, gdy  $\exists i \in [1; N-1] : |\beta_i| = \pi/2$   
(zmiana stopnia nieholonomiczności)
- strukturalnie niestabilny dla  $v_0 < 0$   
(efekt składania się pojazdu oraz efekt scyzoryka – ang. *jackknifing phenomenon*)
- różniczkowo płaski\*\*\*: wyścia płaskie  $x_N$  i  $y_N$   
(linearyzowalny sprzężeniem zwrotnym)

\*J.-P. Laumond: Controllability of a multibody mobile robot, IEEE Trans. Robotics and Automation, 9(6), 1993

\*\*F. Jean: The car with N trailers: characterization of the singular configurations, ESAIM: Control, Optim. Calc. Variations, Vol.1, 1996

\*\*\* P. Rouchon et al.: Flatness, motion planning and trailer systems, Proc. of 32nd CDC Conf., San Antonio USA, 1993

- 1 Wprowadzenie
- 2 Model kinematyki SPNP
- 3 Definicja zadania sterowania**
- 4 Kaskadowa struktura sterowania
- 5 Zastosowanie metody VFO
- 6 Weryfikacja numeryczna
- 7 Uwagi końcowe

Wektor konfiguracji referencyjnej:

$$\mathbf{q}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{\beta t} \\ \bar{\mathbf{q}}_t \end{bmatrix} = [\beta_{t1} \dots \beta_{tN} \theta_{tN} x_{tN} y_{tN}]^T \in \mathbb{R}^{N+3}$$

Wektor błędu konfiguracji:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\beta \\ \bar{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = [e_{\beta 1} \dots e_{\beta N} e_\theta e_x e_y]^T \triangleq \mathbf{q}_t - \mathbf{q} \quad (13)$$

Wektor błędów kątów w przegubach:

$$\mathbf{e}_\beta \triangleq [\beta_{t1} - \beta_1 \dots \beta_{tN} - \beta_N]^T \in \mathbb{R}^N \quad (14)$$

Wektor błędu położenia (orientacji i pozycji) ostatniego segmentu:

$$\bar{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} e_\theta \\ e_x \\ e_y \end{bmatrix} \triangleq \bar{\mathbf{q}}_t - \bar{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \theta_{tN} - \theta_N \\ x_{tN} - x_N \\ y_{tN} - y_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (15)$$

## Śledzenie trajektorii

Dane:  $q_t(\tau) \in C^d$

Założenia:

- At1. trajektoria  $q_t(\tau)$  jest dopuszczalna i ustawnie pobudzająca:  $\forall \tau \geq 0 \quad \dot{x}_{tN}^2(\tau) + \dot{y}_{tN}^2(\tau) \neq 0$
- At2. wszystkie elementy wektora  $q$  mierzalne
- At3. wartości parametrów  $L_i$  dokładnie znane

## Sterowanie do punktu

Dane:  $q_t = \text{const}, \beta_{ti} \triangleq 0, i = 1, \dots, N$

Założenia:

- Ap1. dla ostatniego segmentu:  $\bar{e}(0) \neq 0$
- Ap2. wszystkie elementy wektora  $q$  mierzalne
- Ap3. wartości parametrów  $L_i$  dokładnie znane

Zadanie sterowania polega na zaprojektowaniu reguły sterowania ze sprzężeniem zwrotnym  $u_0 = u_0(q_t, q, \cdot)$ , która zastosowana do kinematyki robota reprezentowanej równaniami (5)-(10) zapewni zbieżność błędu (13) w takim sensie, że:

## Śledzenie trajektorii

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\bar{e}(\tau)\| \leq \delta_1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} |e_{\beta_i}(\tau)| \leq \delta_2,$$

## Sterowanie do punktu

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\bar{e}(\tau)\| \leq \delta_1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_{\beta_i}(\tau) = \pm k\pi$$

przy czym:  $\delta_1, \delta_2 \geq 0$  to założone otoczenia zera w przestrzeni uchybu oraz  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .

- 1 Wprowadzenie
- 2 Model kinematyki SPNP
- 3 Definicja zadania sterowania
- 4 Kaskadowa struktura sterowania**
- 5 Zastosowanie metody VFO
- 6 Weryfikacja numeryczna
- 7 Uwagi końcowe

# Propagacja prędkości wzdłuż łańcucha kinematycznego SPNP

Propagacja prędkości w kierunku **ciągnik** → **przyczepy** (na podstawie kinematyki (5)-(10)):

$$\omega_i = \frac{1}{L_i} v_{i-1} \sin \beta_i \quad (16)$$

$$v_i = v_{i-1} \cos \beta_i \quad (17)$$

$$\beta_i = \theta_{i-1} - \theta_i \quad (18)$$

oraz

$$\dot{\beta}_i = \dot{\theta}_{i-1} - \dot{\theta}_i = \omega_{i-1} - \omega_i \quad (19)$$

Propagacja prędkości w kierunku **przyczepy** → **ciągnik** (na podstawie (16)-(19)):

$$v_{i-1} = L_i \omega_i \sin \beta_i + v_i \cos \beta_i \quad (20)$$

$$\omega_{i-1} = \omega_i + \dot{\beta}_i \quad (21)$$

$$\beta_i = \text{Atan2c}(L_i \omega_i \cdot v_{i-1}, v_i \cdot v_{i-1}) \in \mathbb{R} \quad (22)$$

$\text{Atan2c}(\cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

Eksperyment myślowy: uwalniamy ostatnią przyczepę i traktujemy ją jak pojazd typu monocykl o wejściach sterujących  $\omega_N$  i  $v_N$ .

Zakładamy, że dane są funkcje sterujące  $\Phi_\omega(\bar{e}, \cdot)$ ,  $\Phi_v(\bar{e}, \cdot)$ , które zapewniają asymptotyczne śledzenie trajektorii lub asymptotyczną stabilizację w punkcie dla pojazdu typu monocykl:

$$\text{LTPT: } \omega_N = \Phi_\omega(\bar{e}, \cdot), v_N = \Phi_v(\bar{e}, \cdot) \Rightarrow \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\bar{e}(\tau)\| = \|\bar{q}_t(\tau) - \bar{q}(\tau)\| = 0$$

$$\text{LTPS: } \omega_N = \Phi_\omega(\bar{e}, \cdot), v_N = \Phi_v(\bar{e}, \cdot) \Rightarrow \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\bar{e}(\tau)\| = \|\bar{q}_t - \bar{q}(\tau)\| = 0$$

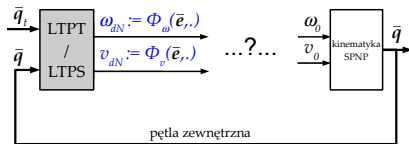
LTPT: Last-Trailer Posture Tracker, LTPS: Last-Trailer Posture Stabilizer



# Wyprowadzenie sterowania kaskadowego – pętla zewnętrzna

Skoro w SPNP **nie możemy bezpośrednio wymusić** spełnienia równań  $\omega_N = \Phi_\omega(\bar{e}, \cdot)$  oraz  $v_N = \Phi_v(\bar{e}, \cdot)$ , zatem proponujemy przyjąć:

$$\omega_{dN} := \Phi_\omega(\bar{e}, \cdot), \quad v_{dN} := \Phi_v(\bar{e}, \cdot) \quad (23)$$



Jak zapewnić, aby  $(\omega_{dN} - \omega_N) \rightarrow 0$  oraz  $(v_{dN} - v_N) \rightarrow 0$ ?

⇓

Realizacja  $(\omega_{dN} - \omega_N) \rightarrow 0$  oraz  $(v_{dN} - v_N) \rightarrow 0$  możliwa poprzez odpowiedni ruch segmentu  $N - 1$ , który wynika z ruchu segmentu  $N - 2 \dots$ , który ostatecznie wynika z ruchu modułu 0 czyli modułu ciągnika (aktywny segment pojazdu SPNP).

# Wyprowadzenie sterowania kaskadowego – pętle wewnętrzne

## Propozycja procedury projektowej

K1. propagacja prędkości zadanych oraz kąta zadany w złączu (na podstawie (20)-(22)):

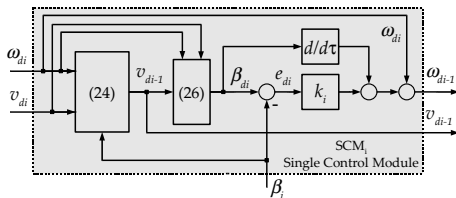
$$v_{di-1} \triangleq L_i \omega_{di} \sin \beta_i + v_{di} \cos \beta_i \quad (24)$$

$$\omega_{di-1} \triangleq \omega_{di} + [\dot{\beta}_i]_d \quad (25)$$

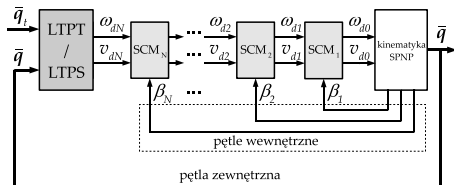
$$\beta_{di} \triangleq \text{Atan2c}(L_i \omega_{di} \cdot v_{di-1}, v_{di} \cdot v_{di-1}) \in \mathbb{R} \quad (26)$$

K2. konstrukcja wewnętrznej pętli sprzężenia zwrotnego:

$$[\dot{\beta}_i]_d \triangleq k_i(\beta_{di} - \beta_i) + \dot{\beta}_{di} = k_i e_{di} + \dot{\beta}_{di}, \quad k_i > 0 \quad (27)$$



# Wynikowy schemat układu sterowania kaskadowego SPNP



$\bar{q}$  – wyjście (odpowiedź) obiektu sterowania  
 $\beta_i$  – wyjścia pomocnicze

Równania sterownika:

$$v_{dN} := \Phi_v(\bar{e}, \cdot) \quad (28)$$

$$\omega_{dN} := \Phi_\omega(\bar{e}, \cdot) \quad (29)$$

$$v_{dN-1} := L_N \omega_{dN} \sin \beta_N + v_{dN} \cos \beta_N \quad (30)$$

$$\beta_{dN} := \text{Atan2c} \left( L_N \omega_{dN} v_{dN-1}, v_{dN} v_{dN-1} \right) \quad (31)$$

$$\omega_{dN-1} := k_N (\beta_{dN} - \beta_N) + \dot{\beta}_{dN} + \omega_{dN} \quad (32)$$

⋮

$$v_{d1} := L_2 \omega_{d2} \sin \beta_2 + v_{d2} \cos \beta_2 \quad (33)$$

$$\beta_{d2} := \text{Atan2c} (L_2 \omega_{d2} v_{d1}, v_{d2} v_{d1}) \quad (34)$$

$$\omega_{d1} := k_2 (\beta_{d2} - \beta_2) + \dot{\beta}_{d2} + \omega_{d2} \quad (35)$$

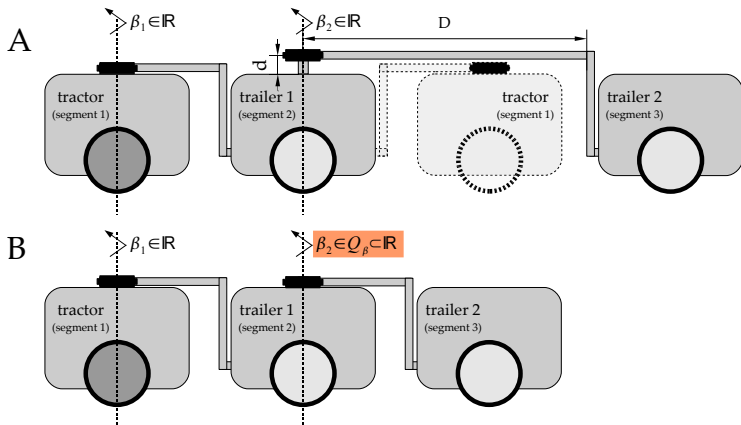
$$v_{d0} := L_1 \omega_{d1} \sin \beta_1 + v_{d1} \cos \beta_1 \quad (36)$$

$$\beta_{d1} := \text{Atan2c} (L_1 \omega_{d1} v_{d0}, v_{d1} v_{d0}) \quad (37)$$

$$\omega_{d0} := k_1 (\beta_{d1} - \beta_1) + \dot{\beta}_{d1} + \omega_{d1} \quad (38)$$

Pozostają do określenia jawne postaci funkcji sterujących  $\Phi_v(\bar{e}, \cdot)$  oraz  $\Phi_\omega(\bar{e}, \cdot)$

# Efekt składania się łańcucha kinematycznego pojazdu



A: konstrukcja mechanicznie dopuszczająca składanie się pojazdu ( $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ )

B: konstrukcja z mechanicznym ograniczeniem drugiego kąta skręcenia ( $\beta_2 \in Q_\beta \subsetneq \mathbb{R}$ )

# Efekt składania się łańcucha kinematycznego pojazdu

Przedstawiona postać równań dopuszcza występowanie efektu składania pojazdu, ponieważ:

$$\beta_{di} \triangleq \text{Atan2c} \left( \underbrace{L_i \omega_{di} \cdot v_{di-1}}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{v_{di} \cdot v_{di-1}}_{\in \mathbb{R}} \right) \in \mathbb{R}$$

Propozycja unikania efektu składania:

$$v_{di-1} \triangleq \sigma |L_i \omega_{di} \sin \beta_i + v_{di} \cos \beta_i|, \quad \sigma \in \{-1, +1\} \quad (39)$$

wówczas

$$\beta_{di} \triangleq \text{Atan2c} \left( \underbrace{L_i \omega_{di} \cdot v_{di-1}}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{v_{di} \cdot v_{di-1}}_{\in \mathbb{R}^+ \text{ gdy } \text{sgn}(v_{di}) = \sigma} \right) \in ?$$

**Skuteczność propozycji (39) zależy od własności sterownika pętli zewnętrznej (LTPT/LTPS).**  
Poza modyfikacją (39) pozostałe równania sterownika nie ulegają zmianie.

$\sigma$  to zmienna decyzyjna, której wartość wybierana jest w odniesieniu do własności sterownika pętli zewnętrznej (LTPT/LTPS)

## 1 Nieciągłość algorytmu

Definicja  $\beta_{di}(\tau_I) = \text{Atan2c}(A(\tau_I), B(\tau_I))$  nieokreślona, gdy  $A(\tau_I) = B(\tau_I) = 0$ .

Propozycja: w chwilach  $\tau_I$  przyjąć  $\beta_{di}(\tau_I) := \beta_{di}^- = \lim_{\tau \rightarrow \tau_I^-} \beta_{di}(\tau)$ . Alternatywnie:

$$\text{IF } (A^2 + B^2 \leq \epsilon) \text{ AND } (\|\bar{e}\| \geq \epsilon_e) \text{ THEN } \beta_{di} := \beta_{di}^-$$

## 2 Realizacja sprzężeń wyprzedzających $\dot{\beta}_{di}$

- analityczna wynikająca z formalnego zróżniczkowania  $\beta_{di}$   
(wymaga pochodnych  $\omega_{di}$  oraz  $v_{di}$ )
- numeryczna z zastosowaniem *dokładnych odpornych różniczkowatorów*  
(ang. *exact robust differentiators*\*)
- numeryczna aproksymacja poprzez filtrację:  $\dot{\beta}_{di} \approx \dot{\beta}_{diF} = \mathcal{L}^{-1} \{s\beta_{di}(s)/(1 + sT_F)\}$   
(aproksymacja zwykle pogarsza dokładność śledzenia w stanie ustalonym)

## 3 Zasada syntezy pętli wewnętrznych – reguła heurystyczna:

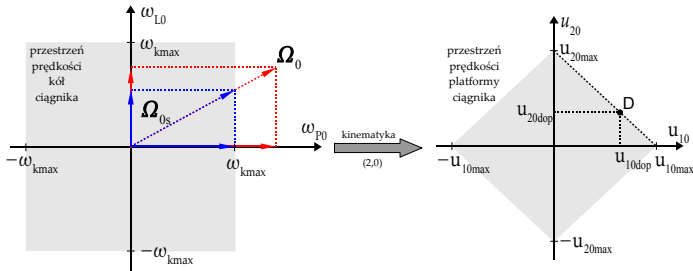
$$k_i > k_{i+1} \quad (40)$$

Wybór wartości  $k_i > 0$  jako kompromis między sztywnością pętli wewnętrznych a wrażliwością układu zamkniętego na szumy pomiarowe oraz tolerancją ograniczeń sygnałów sterujących (prędkości kół ciągnika).

\* A. Levant: Robust exact differentiation via sliding mode technique, Automatica, 34(3), 1998

# Kwestie implementacyjne – ograniczenia sterowania

$\omega_{k \max}$  – maksymalna dopuszczalna prędkość kątoowa koła ciągnika (kinematyka (2,0))



$$\mathbf{\Omega}_0 = \begin{bmatrix} b/(2r) & 1/r \\ -b/(2r) & 1/r \end{bmatrix} \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}_0 = [u_{10} \ u_{20}]^T = [\omega_0 \ v_0]^T, \quad \mathbf{\Omega}_0 = [\omega_{P0} \ \omega_{L0}]^T$$

Procedura skalowania prędkości:

$$\mathbf{u}_{0s} = \frac{1}{s} \mathbf{u}_0, \quad s \triangleq \max \left\{ 1; \frac{|\omega_{P0}|}{\omega_{k \max}}; \frac{|\omega_{L0}|}{\omega_{k \max}} \right\} \geq 1 \quad (41)$$

Składowe przeskalowanego sterowania  $\mathbf{u}_{0s}$  są już realizowalne fizycznie.

# Plan

- 1 Wprowadzenie
- 2 Model kinematyki SPNP
- 3 Definicja zadania sterowania
- 4 Kaskadowa struktura sterowania
- 5 Zastosowanie metody VFO**
- 6 Weryfikacja numeryczna
- 7 Uwagi końcowe



# Sterownik VFO jako LTPT lub LTPS - równania

Równania sterownika VFO zapisane dla ostatniej (N-tej) przyczepy:

$$\Phi_\omega \triangleq k_a e_a + \dot{\theta}_a \quad (42)$$

$$\Phi_v \triangleq h_x \cos \theta_N + h_y \sin \theta_N \quad (43)$$

## Śledzenie trajektorii (LTPT)

$$h_x = k_p e_x + v_x, \quad v_x = \dot{x}_t \quad (44)$$

$$h_y = k_p e_y + v_y, \quad v_y = \dot{y}_t \quad (45)$$

$$e_a = \theta_a - \theta_N \quad (46)$$

$$\theta_a = \text{Atan2c}(\sigma \cdot h_y, \sigma \cdot h_x) \quad (47)$$

$$\dot{\theta}_a = (\dot{h}_y h_x - h_y \dot{h}_x) / (h_x^2 + h_y^2) \quad (48)$$

$$\sigma \triangleq \text{sgn}(u_{2t}(\tau)) \quad (49)$$

## Sterowanie do punktu (LTPS)

$$h_x = k_p e_x + v_x, \quad v_x = -\eta \sigma \|\bar{e}^*\| \cos \theta_{tN} \quad (50)$$

$$h_y = k_p e_y + v_y, \quad v_y = -\eta \sigma \|\bar{e}^*\| \sin \theta_{tN} \quad (51)$$

$$e_a = \theta_a - \theta_N \quad (52)$$

$$\theta_a = \text{Atan2c}(\sigma \cdot h_y, \sigma \cdot h_x) \quad (53)$$

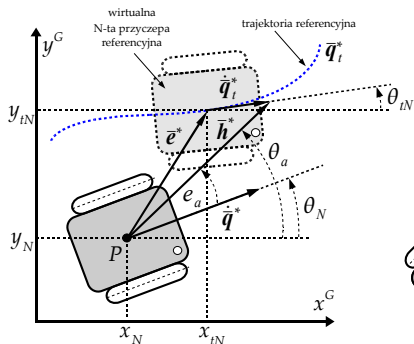
$$\dot{\theta}_a = (\dot{h}_y h_x - h_y \dot{h}_x) / (h_x^2 + h_y^2) \quad (54)$$

$$\sigma \triangleq \text{sgn}(e_{x0} \cos \theta_{tN} + e_{y0} \sin \theta_{tN}) \quad (55)$$

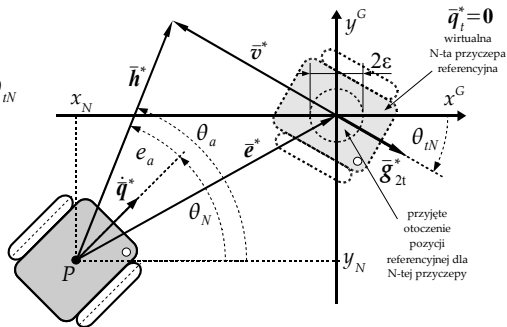
Współczynniki projektowe:  $k_a, k_p > 0, \eta \in (0, k_p)$

Postaci zmiennej decyzyjnej  $\sigma$  zdefiniowane w (49) i (55) są wykorzystywane w ramach modyfikacji (39) algorytmu sterowania kaskadowego.

śledzenie trajektorii ( $k_p = 1$ )



sterowanie do punktu ( $k_p = 1$ )



$$\bar{h}^* = [h_x \ h_y]^T, \bar{e}^* = [e_x \ e_y]^T, \bar{v}^* = [v_x \ v_y]^T, \dot{\bar{q}}^* = [\dot{x}_N \ \dot{y}_N]^T, \bar{g}_{2t}^* = [\cos \theta_{tN} \ \sin \theta_{tN}]^T$$

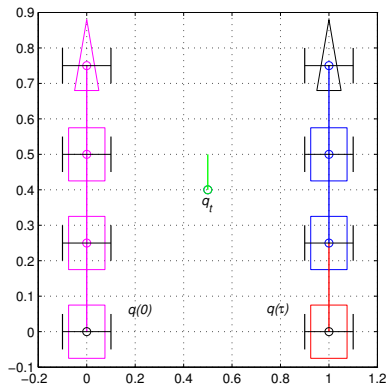
- Gwarancja ruchu nieoscylacyjnego, *prawie* bez zmiany znaku prędkości postępowej  
(możliwa co najwyżej jedna zmiana znaku w stanie przejściowym  $\Rightarrow$  skuteczność propozycji (39))
- Efekt naprowadzania N-tej przyczepy przydatny w prostowaniu łańcucha SPNP
- Prostota strojenia sterownika VFO:
  - K1.  $k_p \in (0, 5]$   
jako kompromis między szybkością zbieżności a wrażliwością na szумы pomiarowe i opóźnienia w pętli sprzężenia
  - K2.  $k_a := 2k_p$   
ponieważ proces orientowania jest kluczowy i istotniejszy od procesu popychania
  - K3.  $\eta \in (0, k_p)$   
zgodnie z żądaną intensywnością efektu naprowadzania (tym większa intensywność im mniejsze  $k_p - \eta$ )
- Gwarancja asymptotycznej zbieżności błędów do zera dla zadania śledzenia oraz sterowania do punktu\*

\*M. Michałek, K. Kozłowski: Vector-Field-Orientation feedback control method for a differentially driven vehicle, IEEE Trans. Control Sys. Techn., 18(1), 2010

# Plan

- 1 Wprowadzenie
- 2 Model kinematyki SPNP
- 3 Definicja zadania sterowania
- 4 Kaskadowa struktura sterowania
- 5 Zastosowanie metody VFO
- 6 Weryfikacja numeryczna**
- 7 Uwagi końcowe

# Ilustracja wyników – legenda



$q(0)$ : konfiguracja początkowa pojazdu,  $q_t$ : konfiguracja referencyjna pojazdu,  $q(\tau)$ : bieżąca konfiguracja pojazdu

# Sim1: śledzenie trajektorii kołowej (ruch tyłem)

## Warunki symulacji

$$q(0) = [0 \ 0 \ 0 \ \pi \ 0 \ 0]^T$$

$$q_t(0) = [0 \ 0 \ 0 \ \pi/2 \ -1 \ 0]^T$$

$$\omega_{3t} = 0.15 \text{ rad/s}, \quad v_{3t} = -0.2 \text{ m/s}$$

$$\hat{\beta}_{d1} := \hat{\beta}_{d1F}, \quad T_F = 0.05 \text{ s} \quad \hat{\beta}_{d2,3} := 0$$

## Wartości parametrów

$$L_1 = L_2 = L_3 = 0.25 \text{ m}$$

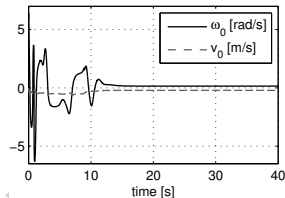
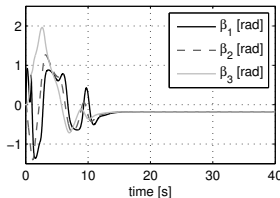
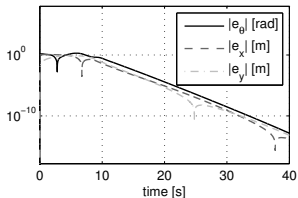
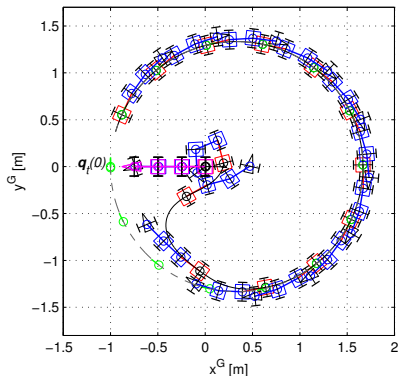
$$k_1 = 50, \quad k_2 = 20, \quad k_3 = 5, \quad \epsilon = 0.0001$$

$$k_a = 2, \quad k_p = 1, \quad \epsilon_h = 0.0001$$

$$\omega_{k \max} = 8\pi \text{ rad/s}, \quad b = 0.17 \text{ m}, \quad r = 0.025 \text{ m}$$

Animacja: S1RMPMovie.gif

TRAJECTORY TRACKING + VFO for LTPT



# Sim2: śledzenie trajektorii złożonej (ruch tyłem)

## Warunki symulacji

$$q(0) = [0 \ 0 \ 0 \ \pi/2 \ 0 \ -0.3]^T$$

$$q_t(0) = [0 \ 0 \ 0 \ \pi/2 \ -1 \ 0]^T$$

$$\omega_{3t} = 0.15(1 + \sin 0.5\tau) \text{ rad/s}, \quad v_{3t} = -0.2 \text{ m/s}$$

$$\dot{\beta}_{d1} := \dot{\beta}_{d1F}, \quad T_F = 0.05 \text{ s} \quad \dot{\beta}_{d2,3} := 0$$

## Wartości parametrów

$$L_1 = L_2 = L_3 = 0.25 \text{ m}$$

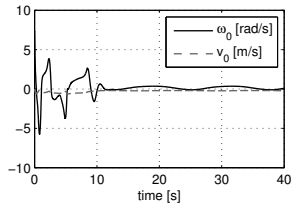
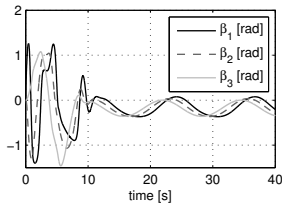
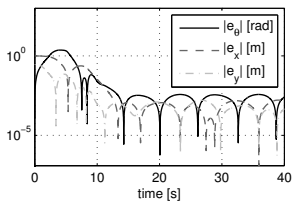
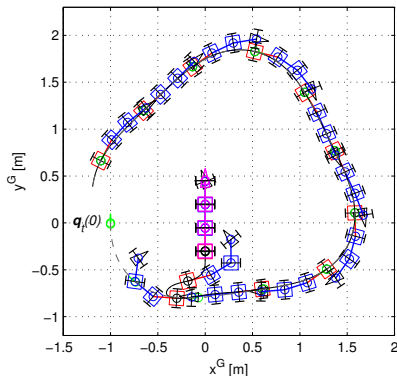
$$k_1 = 50, \quad k_2 = 20, \quad k_3 = 5, \quad \epsilon = 0.0001$$

$$k_a = 2, \quad k_p = 1, \quad \epsilon_h = 0.0001$$

$$\omega_{k \max} = 8\pi \text{ rad/s}, \quad b = 0.17 \text{ m}, \quad r = 0.025 \text{ m}$$

Animacja: S2RMPMovie.gif

TRAJECTORY TRACKING + VFO for LTPT



# Sim3: sterowanie do punktu (parkowanie równoległe tyłem)

## Warunki symulacji

$$q(0) = [0 \ 0 \ 0 \ \pi/2 \ 0 \ 0]^T$$

$$q_t = [0 \ 0 \ 0 \ \pi/2 \ -1 \ 0]^T$$

$$\omega_{3t} = v_{3t} \equiv 0$$

$$\dot{\beta}_{d1} := \dot{\beta}_{d1F}, \quad T_F = 0.05 \text{ s} \quad \dot{\beta}_{d2,3} := 0$$

## Wartości parametrów

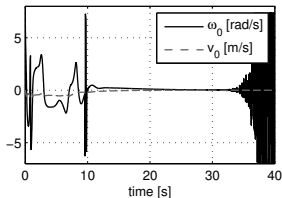
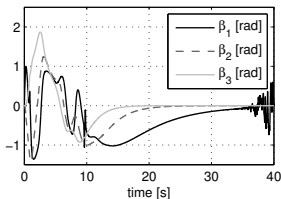
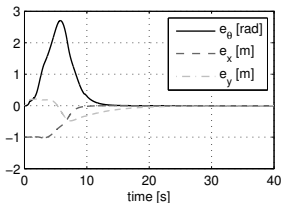
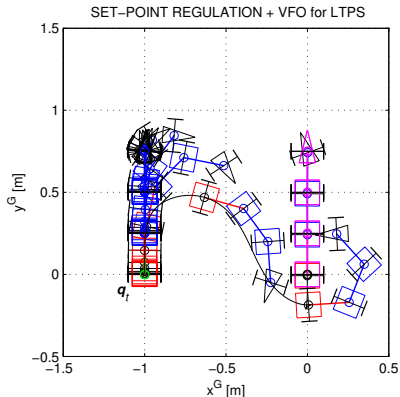
$$L_1 = L_2 = L_3 = 0.25 \text{ m}$$

$$k_1 = 50, \quad k_2 = 20, \quad k_3 = 5, \quad \epsilon = 0.0001$$

$$k_a = 2, \quad k_p = 1, \quad \eta = 0.8, \quad \epsilon_h = 0.0$$

$$\omega_{k \max} = 8\pi \text{ rad/s}, \quad b = 0.17 \text{ m}, \quad r = 0.025 \text{ m}$$

Animacja: [S3RMPMovie.gif](#)   [S3FoldRMPMovie.gif](#)





# Sim4: sterowanie do punktu (parkowanie równoległe przodem)

## Warunki symulacji

$$q(0) = [0 \ 0 \ 0 \ \pi/2 \ 0 \ 0]^T$$

$$q_t = [0 \ 0 \ 0 \ \pi/2 \ -1 \ 0]^T$$

$$\omega_{3t} = v_{3t} \equiv 0$$

$$\dot{\beta}_{d1} := \dot{\beta}_{d1F}, \quad T_F = 0.05 \text{ s} \quad \dot{\beta}_{d2,3} := 0$$

## Wartości parametrów

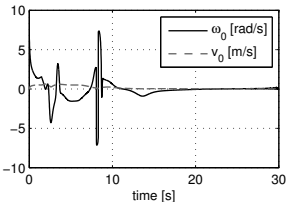
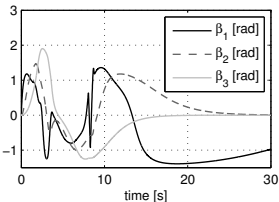
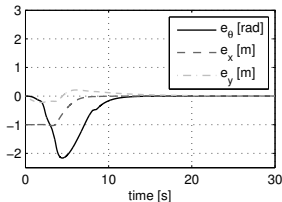
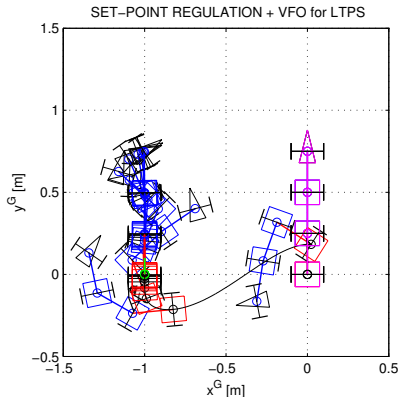
$$L_1 = L_2 = L_3 = 0.25 \text{ m}$$

$$k_1 = 50, \quad k_2 = 20, \quad k_3 = 5, \quad \epsilon = 0.0001$$

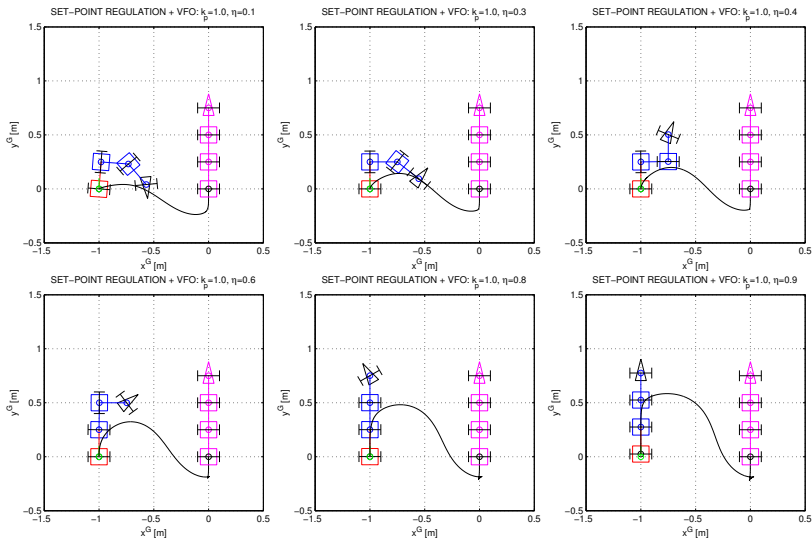
$$k_a = 2, \quad k_p = 1, \quad \eta = 0.8, \quad \epsilon_h = 0.0$$

$$\omega_{k \max} = 8\pi \text{ rad/s}, \quad b = 0.17 \text{ m}, \quad r = 0.025 \text{ m}$$

Animacja: [S4RMPMovie.gif](#)



# Sterowanie do punktu – wpływ efektu naprowadzania



Czasy trwania poszczególnych symulacji:

$\tau_h \approx 29$  s dla  $\eta = 0.1, \eta = 0.3, \eta = 0.4$  oraz  $\tau_h = 40$  s dla  $\eta = 0.6, \eta = 0.8, \eta = 0.9$ .

- 1 Wprowadzenie
- 2 Model kinematyki SPNP
- 3 Definicja zadania sterowania
- 4 Kaskadowa struktura sterowania
- 5 Zastosowanie metody VFO
- 6 Weryfikacja numeryczna
- 7 Uwagi końcowe**

# Uwagi na temat stabilności układu zamkniętego

Można pokazać, że dynamika układu zamkniętego daje się zapisać w następującej postaci:

$$\dot{\bar{e}} = \mathbf{f}(\bar{e}, \tau) + \mathbf{f}_1(\bar{e}, e_d, \tau), \quad \dot{e}_d = \mathbf{A}e_d + \mathbf{f}_2(\bar{e}, e_d, \tau)$$

gdzie:

$$e_d = [e_{d1} \ \dots \ e_{dN}]^T = [\beta_{d1} - \beta_1 \ \dots \ \beta_{dN} - \beta_N]^T$$

$$\mathbf{A} = \text{diag}\{-k_1, -k_2, \dots, -k_N\}$$

$\mathbf{f}_1(\bar{e}, e_d, \tau) = \mathbf{G}(\bar{q}_t - \bar{e})\mathbf{\Gamma}e_{\omega v}(\bar{e}, e_d, \tau)$ ,  $\mathbf{G}(\cdot)$  jest macierzą kinematyki monocykla

$\mathbf{f}_2(\bar{e}, e_d, \tau) = \mathbf{H}e_{\omega v}(\bar{e}, e_d, \tau)$

$$e_{\omega v} = [e_{\omega}^T \ e_v^T]^T, \ e_{\omega} = [\omega_{d1} - \omega_1 \ \dots \ \omega_{dN} - \omega_N]^T, \ e_v = [v_{d1} - v_1 \ \dots \ v_{dN} - v_N]^T$$

$\mathbf{\Gamma}$ ,  $\mathbf{H}$  są macierzami o stałych elementach równych  $-1$ ,  $0$  lub  $+1$

Dodatkowo zachodzi:  $\mathbf{f}_2(e_d = \mathbf{0}, \cdot) = \mathbf{0}$  oraz  $\mathbf{f}_1(e_d = \mathbf{0}, \cdot) = \mathbf{0}$ , a nominalna (niezaburzona) dynamika  $\dot{\bar{e}} = \mathbf{f}(\bar{e}, \tau)$  jest asymptotycznie stabilna (dla  $\bar{q}_t = \text{const}$  mamy  $\dot{\bar{e}} = \mathbf{f}(\bar{e})$ ).

Wykazując stosowne cechy funkcji  $\mathbf{f}_1(\cdot)$  oraz  $\mathbf{f}_2(\cdot)$  planuje się skorzystać z twierdzeń o stabilności systemów wzajemnie połączonych (ang. *interconnected systems*)\*.

\* H. Khalil: Nonlinear systems. 3rd Edition, Prentice-Hall, 2002 | A. Isidori: Nonlinear control systems II, Springer 1999

- 1 Ograniczenie skutków znacznej wrażliwości układu zamkniętego w otoczeniu punktu  $\bar{q}_t$
- 2 Badania w zakresie odporności układu zamkniętego  
(niepewność parametryczna:  $L_{si} \neq L_i$  oraz  $L_{hi} \neq 0$ , szумы pomiarowe w sprzężeniu zwrotnym:  $q_n = q + n$ )
- 3 Przeprowadzenie formalnej analizy stabilności i zbieżności
- 4 Eksperymentalna weryfikacja metody (stanowisko laboratoryjne RMP-SW)
- 5 Rozszerzenie koncepcji sterowania kaskadowego na pojazd OPNP

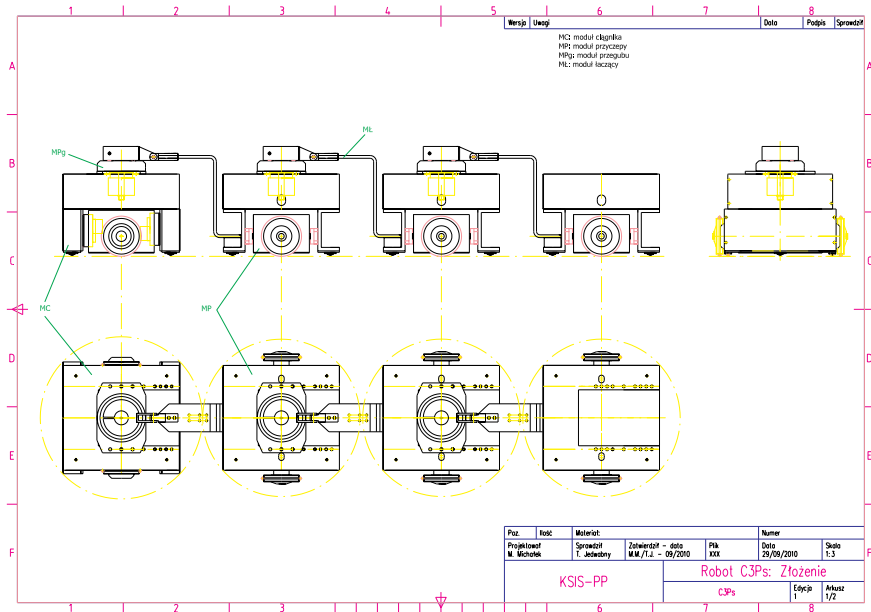
Ad 4: Pomimo *trudniejszej* kinematyki OPNP propagacja prędkości jest tu prostsza (!):

$$\begin{bmatrix} \omega_i \\ v_i \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\beta_i) \begin{bmatrix} \omega_{i-1} \\ v_{i-1} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \omega_{i-1} \\ v_{i-1} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1}(\beta_i) \begin{bmatrix} \omega_i \\ v_i \end{bmatrix}$$

gdzie

$$\mathbf{J}(\beta_i) = \begin{bmatrix} -(L_{hi}/L_i) \cos \beta_i & (1/L_i) \sin \beta_i \\ L_{hi} \sin \beta_i & \cos \beta_i \end{bmatrix}, \quad \det(\mathbf{J}(\beta_i)) = -(L_{hi}/L_i)$$

# Pojazd laboratoryjny RMP (Robot Mobilny Przegubowy)



Dziękuję za uwagę!