

# Laboratorium identyfikacji systemów

Instytut Automatyki i Robotyki (IAR)  
Politechnika Poznańska (PP)  
opracowanie: Maciej M. Michałek

## C3 WSADOWA PARAMETRYCZNA IDENTYFIKACJA SYSTEMÓW

Ćwiczenie poświęcone jest wybranym metodom wsadowej identyfikacji parametrycznej, a mianowicie metodzie najmniejszych kwadratów (w skrócie: LS, zwanej też metodą błędu równaniowego) oraz metodzie zmiennych instrumentalnych (w skrócie: IV). Podczas ćwiczenia przyjęte zostanie założenie o znajomości struktury identyfikowanego systemu przy nieznaności wartości jego parametrów (model i identyfikacja typu GREY-BOX). Wsadowe metody identyfikacji wykorzystują jednocześnie wszystkie dostępne dane pomiarowe (tj. cały *wsad* danych) do oszacowania wartości parametrów modelu.

### 1 Identyfikacja systemu statycznego metodą LS

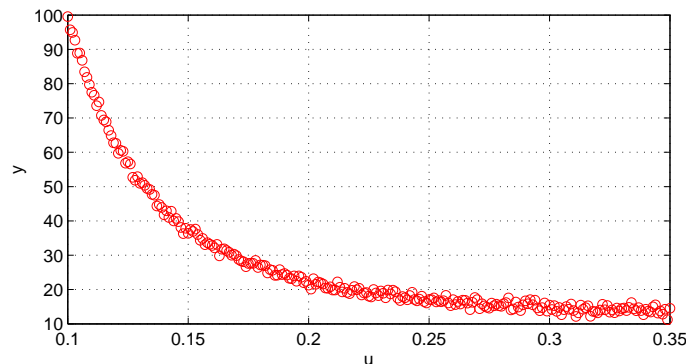
Systemem *statycznym* nazywamy:

- system *pozbawiony dynamiki* – wartość *ustalona* odpowiedzi  $y$  takiego systemu pojawia się na wyjściu natychmiast po podaniu pobudzenia  $u$  (brak stanów przejściowych) lub
- zależność pomiędzy wartościami wejścia sterującego  $u$  a wartościami odpowiedzi/wyjścia  $y$  rozważanego systemu dynamicznego **w stanie ustalonym**, tj. po zaniknięciu składowych przejściowych (stany przejściowe istnieją lecz nas nie interesują w procesie modelowania).

Przykładowy zbiór danych pomiarowych w postaci par *wartość wejścia  $u$  wraz z odpowiadającą jej ustaloną wartością wyjścia  $y$*  prezentuje wykres z rysunku 1. System statyczny będziemy traktować jako odwzorowanie (liniowe bądź nieliniowe) między wejściem  $u$  i wyjściem  $y$ , które można opisać równaniem:

$$y = f_o(u, \mathbf{p}_o) + v, \quad \mathbf{p}_o = [p_{1o} \ p_{2o} \ \dots \ p_{d_{po}}]^\top, \quad (1)$$

gdzie  $\mathbf{p}_o$  jest wektorem *prawdziwych* (nieznanych) parametrów systemu,  $f_o(u, \mathbf{p}_o)$  reprezentuje prawdziwe odwzorowanie wejścia w wyjście systemu, natomiast  $v$  jest zakłóceniem stochastycznym obecnym w pomiarach wyjścia  $y$ . W ramach identyfikacji parametrycznej poszukujemy parametrów  $\mathbf{p} = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_{d_p}]^\top$  dla modelu  $f(u, \mathbf{p})$ , którego struktura jest zgodna (z założenia) ze strukturą odwzorowania  $f_o(u, \mathbf{p}_o)$ . Parametryzację modelu  $f(\cdot)$  można przeprowadzić



Rysunek 1: Przykładowy zbiór par  $(u_n, y_n)$ ,  $n = 1, \dots, N$ , pomiarów wynikający ze statycznej zależności między wejściem  $u$  a wyjściem  $y$  pewnego systemu

na różne sposoby. W ćwiczeniu rozważać będziemy tylko parametryzacje liniowe, czyli takie które prowadzą do modelu w postaci regresji liniowej (model zapisany jako liniowa kombinacja parametrów  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, d_p$  oraz wybranych funkcji bazowych):

$$f(u, \mathbf{p}) \triangleq \sum_{i=1}^{d_p} p_i \cdot F_i(u) \quad \Rightarrow \quad \hat{y}_m = \sum_{i=1}^{d_p} p_i \cdot F_i(u). \quad (2)$$

Model (2) można zapisać w postaci regresji liniowej  $\hat{y}_m = \boldsymbol{\varphi}^\top(u) \mathbf{p}$ , dla  $\mathbf{p} = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_{d_p}]^\top$ , i w konsekwencji model mający wyjaśniać dane pomiarowe generowane przez równanie (1) przyjmie postać:

$$y = f(u, \mathbf{p}) + v \quad \Rightarrow \quad y = \boldsymbol{\varphi}^\top(u) \mathbf{p} + v, \quad (3)$$

gdzie  $\boldsymbol{\varphi}(u) = [F_1(u) \ F_2(u) \ \dots \ F_{d_p}(u)]^\top$  jest wektorem regresji zależnym, poprzez funkcje bazowe  $F_i(u)$ , od deterministycznego wejścia  $u$ . Zastosowanie metody najmniejszej sumy kwadratów tzw. błędów równaniowych  $\varepsilon_n(\mathbf{p}) \triangleq y_n - \boldsymbol{\varphi}_n^\top(u) \mathbf{p}$ , zapisanych dla numerów pomiaru  $n \in [1, N]$  na podstawie wzoru (3), prowadzi do estymatora metody LS:

$$\hat{\mathbf{p}}_N^{\text{LS}} = (\boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^\top \mathbf{y}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1^\top(u) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}_N^\top(u) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times d_p}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N, \quad (4)$$

gdzie  $\boldsymbol{\Phi}$  jest (z założenia) deterministyczną macierzą regresji zależną jedynie od deterministycznego wejścia  $u$ . Stopień ufności jakim możemy obdarzyć uzyskany wynik estymacji<sup>1</sup> wynika z macierzy kowariancji estymat  $\text{Cov}[\hat{\mathbf{p}}_N^{\text{LS}}]$ , którą przy nieskorelowanym zakłóceniu  $v \equiv e$  możemy oszacować na podstawie  $N$  par pomiarów  $\{u_n, y_n\}_{n=1}^N$  jak następuje:

$$\text{Cov}[\hat{\mathbf{p}}_N^{\text{LS}}] \approx \hat{\sigma}^2 (\boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{\Phi})^{-1}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N - d_p} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2(\hat{\mathbf{p}}_N^{\text{LS}}), \quad \varepsilon_i(\hat{\mathbf{p}}_N^{\text{LS}}) \triangleq y_i - \boldsymbol{\varphi}_i^\top(u) \hat{\mathbf{p}}_N^{\text{LS}}, \quad (5)$$

przy czym  $\hat{\sigma}^2$  jest estymatą wariancji zakłócenia  $v \equiv e$ ,  $d_p$  jest liczbą estymowanych parametrów, natomiast  $\varepsilon_i(\hat{\mathbf{p}}_N^{\text{LS}})$  jest tzw. błędem resztowym. Gdy  $v$  jest zakłóceniem skorelowanym o zerowej wartości oczekiwanej, wówczas macierz kowariancji estymat

$$\text{Cov}[\hat{\mathbf{p}}_N^{\text{LS}}] = (\boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^\top \mathbf{P}_v \boldsymbol{\Phi} (\boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{\Phi})^{-1} \approx (\boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^\top \hat{\mathbf{P}}_v \boldsymbol{\Phi} (\boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{\Phi})^{-1} \quad (6)$$

wymaga znajomości macierzy  $\mathbf{P}_v$  lub oszacowania  $\hat{\mathbf{P}}_v$  dla wektora zakłóceń  $\mathbf{v} = [v_1 \ \dots \ v_N]^\top$ .

### 1.1 Identyfikacja systemu statycznego metodą LS.

- Plik `IdentWsadowaStat.mat` zawiera dwa zbiory danych pomiarowych  $\mathbf{Z}^N = \{u_n, y_n\}_{n=1}^N$  zebrane z wejścia i wyjścia obiektu statycznego i zapisane w macierzach `DaneStatW`, `DaneStatC`, przy czym pierwsza z nich zawiera pomiary zakłócone zakłóceniem nieskorelowanym  $e$ , a druga zakłóceniem skorelowanym  $v$ . Wprowadzić dane pomiarowe do przestrzeni roboczej Matlaba instrukcją `load IdentWsadowaStat.mat`; wyświetlić dane pomiarowe i dokonać ich oglądu.
- Przyjmując następującą strukturę modelu odwzorowania statycznego

$$f(u, \mathbf{p}) = p_1 + \sum_{i=2}^4 \frac{p_i}{u^{i-1}} \quad (7)$$

zapisać powyższy model w postaci regresji liniowej i przeprowadzić identyfikację parametryczną stosując wzór (4). Obliczenia wykonać niezależnie dla przypadku zakłócenia danych zakłóceniem  $e$  oraz zakłóceniem  $v$ .

<sup>1</sup>Należy pamiętać, że estymator (4) jest zmienną losową.

- Wykreślić na wspólnym wykresie dane pomiarowe oraz zidentyfikowane odwzorowanie  $\hat{y}_m = f(u, \mathbf{p})$  dla  $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}}_N^{LS}$ . Ocenic jakość identyfikacji.
- Sprawdzić wpływ liczby  $N$  danych pomiarowych na jakość identyfikacji – wybrać do obliczeń podzbiór dostępnych danych pomiarowych z całego zakresu zmienności  $u$ , np. co dziesiątą parę  $\{u_j, y_j\}$  ze zbioru  $Z^N = \{u_n, y_n\}_{n=1}^N$ .
- Oszacować macierz kowariancji (5) (tylko dla danych z zakłóceniem  $e$ ) i określić na jej podstawie przedziały ufności dla poszczególnych estymat parametrów (patrz Uwaga 1, str. 7). O czym mówi macierz  $\text{Cov}[\hat{\mathbf{p}}_N^{LS}]$  i przedziały ufności?

## 2 Identyfikacja pośrednia systemu dynamicznego czasu ciągłego metodami LS oraz IV

Identyfikacja pośrednia systemu dynamicznego czasu ciągłego polega na estymacji parametrów systemu czasu dyskretnego, będącego aproksymacją oryginalnego systemu czasu ciągłego, a następnie na przekształceniu uzyskanego modelu czasu dyskretnego do modelu czasu ciągłego. Dlatego rozważania w tym miejscu skupione będą na estymacji parametrów systemów czasu dyskretnego.

Rozważmy rzeczywisty system dynamiczny czasu dyskretnego

$$y(n) = G_o(q^{-1}, \mathbf{p}_o)u(n) + v(n) = \frac{B_o(q^{-1}, \mathbf{p}_o)}{A_o(q^{-1}, \mathbf{p}_o)}u(n) + v(n), \quad (8)$$

gdzie  $G_o(q^{-1}, \mathbf{p}_o)$  reprezentuje nieznaną dynamikę toru sterowania rzeczywistego systemu o nieznanach rzeczywistych parametrach  $\mathbf{p}_o$ , oraz jego model czasu dyskretnego klasy ARX:

$$A(q^{-1}, \mathbf{p})y(n) = B(q^{-1}, \mathbf{p})u(n) + e(n) \quad \Rightarrow \quad y(n) = G(q^{-1}, \mathbf{p})u(n) + v(n), \quad (9)$$

w którym  $v(n) = H(q^{-1}, \mathbf{p})e(n)$  jest zakłóceniem kolorowym (filtrowanym szumem białym),  $e(n)$  jest (z założenia) szumem białym,  $G(q^{-1}, \mathbf{p}) = \frac{B(q^{-1}, \mathbf{p})}{A(q^{-1}, \mathbf{p})}$  oraz  $H(q^{-1}, \mathbf{p}) = \frac{1}{A(q^{-1}, \mathbf{p})}$  są operatorami transmitancyjnymi, odpowiednio, toru sterowania i toru zakłócenia modelu, natomiast  $A(q^{-1}, \mathbf{p})$  oraz  $B(q^{-1}, \mathbf{p})$  są wielomianami operatora  $q^{-1}$ , odpowiednio, stopnia  $n_a$  i  $n_b$ . Zakładając, że struktura operatora  $G(q^{-1}, \mathbf{p})$  jest taka sama jak struktura  $G_o(q^{-1}, \mathbf{p}_o)$ , zasadniczym celem identyfikacji parametrycznej będzie estymacja parametrów  $\mathbf{p}$  modelu (9) na podstawie zbioru pomiarowego  $Z^N = \{y(nT_p), u(nT_p)\}_{n=0}^{N-1}$  z wykorzystaniem wsadowych metod LS oraz IV.

Struktura (9) pozwala na przepisanie równania modelu, a w konsekwencji także na wyrażenie błędu równaniowego  $\varepsilon$ , jako liniowej funkcji szukanych parametrów:

$$y(n) = \boldsymbol{\varphi}^\top(n) \mathbf{p} + e(n), \quad \varepsilon(n, \mathbf{p}) \triangleq y(n) - \boldsymbol{\varphi}^\top(n) \mathbf{p}, \quad (10)$$

przy czym wektor regresji

$$\boldsymbol{\varphi}^\top(n) = [-y(n-1) \ \dots \ -y(n-n_a) \ u(n-1) \ \dots \ u(n-n_b)] \quad (11)$$

nie jest tutaj funkcją deterministyczną ale stochastyczną (w wyniku auto-regresji modelu klasy ARX). Zastosowanie metody LS do błędów równaniowych (10) dla  $n \in [1, N]$  prowadzi do klasycznej postaci estymatora LS parametrów modelu:

$$\hat{\mathbf{p}}_N^{LS} = (\boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^\top \mathbf{y}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^\top(1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}^\top(N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times d_p}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N, \quad (12)$$

przy czym  $\Phi$  jest tym razem stochastyczną macierzą regresji zależną od poprzednich próbek wyjścia  $y$  oraz wejścia  $u$  systemu. Jeżeli dane pomiarowe  $Z^N$  spełniają założenie poczynione w modelu (9), że zakłócenie  $v$  w rzeczywistym systemie (8) wynika z filtracji

$$v(n) = \frac{1}{A_o(q^{-1}, \mathbf{p}_o)} e(n), \quad (13)$$

wówczas macierz kowariancji estymat parametrów dla skończonej liczby danych ( $N < \infty$ ) szacujemy następująco:

$$\text{Cov}[\hat{\mathbf{p}}_N^{LS}] \approx \hat{\sigma}^2 (\Phi^\top \Phi)^{-1}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N - d_p} \sum_{n=1}^N \varepsilon^2(n, \hat{\mathbf{p}}_N^{LS}), \quad \varepsilon(n, \hat{\mathbf{p}}_N^{LS}) \triangleq y(n) - \varphi^\top(n) \hat{\mathbf{p}}_N^{LS}, \quad (14)$$

gdzie  $\varepsilon(n, \hat{\mathbf{p}}_N^{LS})$  jest tzw. błędem resztowym w chwili  $n$ , natomiast  $d_p$  jest liczbą estymowanych parametrów. Jeżeli założenie (13) jest spełnione i jednocześnie macierz  $\Phi^\top \Phi$  jest nieosobliwa (jest pełnego rzędu równego  $d_p$ ), wówczas estymator (12) jest zgodny, tzn. zachodzi  $\text{plim}_{N \rightarrow \infty} (\hat{\mathbf{p}}_N^{LS} - \mathbf{p}_o) = \mathbf{0}$  (zbieżność wg prawdopodobieństwa).

Jeśli założenie (13) nie jest spełnione przez dane pomiarowe  $Z^N$ , tj. hipoteza o białości błędu równaniowego i tym samym zakłócenia w równaniu (10) nie jest prawdziwa, to równanie modelu należy zapisać w bardziej ogólnej postaci

$$y(n) = \varphi^\top(n) \mathbf{p} + v(n), \quad (15)$$

gdzie  $v(n)$  ma teraz charakter szumu kolorowego skorelowanego ze zmiennymi regresyjnymi zależnymi od wyjścia  $y$ , tj. zachodzi  $E[\varphi(n)v(n)] \neq \mathbf{0}$ . W takim przypadku estymator (12) jest generalnie obciążony, a wyznaczone na jego podstawie estymaty parametrów mogą istotnie różnić się od  $\mathbf{p}_o$ . Aby poprawić jakość estymacji parametrycznej w takim przypadku można zastosować alternatywną metodę identyfikacji parametrycznej, bardziej odporną na właściwości zakłóceń obecnych w danych pomiarowych  $Z^N$ , a mianowicie metodę zmiennych instrumentalnych (IV). Istota tej metody sprowadza się do znalezienia i wykorzystania do obliczeń takiego wektora zmiennych pomocniczych  $\mathbf{z}(n)$ , który spełnia dwa warunki:

- (w1) jest nieskorelowany z zakłóceniem  $v(n)$ , tj.  $E[\mathbf{z}(n)v(n)] \equiv \mathbf{0}$ ,
- (w2) jest (silnie) skorelowany ze zmiennymi regresji w wektorze  $\varphi(n)$ , co oznacza, że macierz  $E[\mathbf{z}(n)\varphi^\top(n)]$  jest nieosobliwa.

Założmy chwilowo, że taki wektor zmiennych instrumentalnych  $\mathbf{z}(n)$  istnieje i możemy go utworzyć. Wówczas estymator wsadowy metody IV przyjmuje następującą postać:

$$\hat{\mathbf{p}}_N^{IV} = (\mathbf{Z}^\top \Phi)^{-1} \mathbf{Z}^\top \mathbf{y}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^\top(1) \\ \vdots \\ \mathbf{z}^\top(N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times d_p}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N, \quad (16)$$

gdzie  $\mathbf{Z}$  jest macierzą zmiennych instrumentalnych,  $\dim(\mathbf{z}) = \dim(\varphi) = d_p$ , natomiast  $\Phi$  jest macierzą regresji skonstruowaną analogicznie jak w metodzie LS. Jeżeli sygnał wejściowy  $u(n)$  oraz zakłócenie  $v(n)$  z równania (15) są wzajemnie nieskorelowane (co wymusza brak obecności sprzężenia zwrotnego między sygnałami  $u$  i  $y$ ), wówczas estymator (16) jest zgodny, tj. zachodzi  $\text{plim}_{N \rightarrow \infty} (\hat{\mathbf{p}}_N^{IV} - \mathbf{p}_o) = \mathbf{0}$  (zbieżność wg prawdopodobieństwa) pomimo niespełnienia założenia (13).

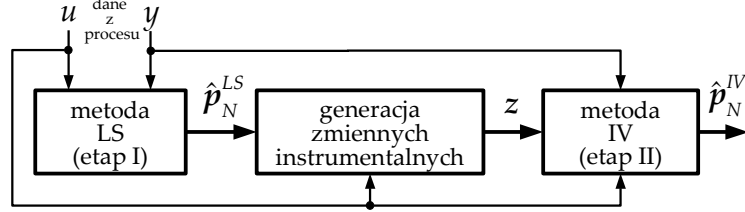
Istnieje szereg sposobów wyznaczania zmiennych instrumentalnych  $\mathbf{z}(n)$ . Poniżej przytoczymy jeden z nich, który dalej będzie wykorzystany w ćwiczeniu. Założmy, że przeprowadziliśmy identyfikację parametryczną metodą LS dla modelu (9) w przypadku, w którym założenie (13) nie jest spełnione przez dane  $Z^N$ . Otrzymaliśmy zatem wektor obciążonych estymat  $\hat{\mathbf{p}}_N^{LS}$ . Do wyznaczenia zmiennych instrumentalnych można wykorzystać wektor  $\hat{\mathbf{p}}_N^{LS}$  prowadząc następujące obliczenia

$$x(n) \triangleq G(q^{-1}, \hat{\mathbf{p}}_N^{LS}) u(n), \quad (17)$$

gdzie  $G(q^{-1}, \hat{\mathbf{p}}_N^{\text{LS}}) = B(q^{-1}, \hat{\mathbf{p}}_N^{\text{LS}})/A(q^{-1}, \hat{\mathbf{p}}_N^{\text{LS}})$  jest operatorem transmitacyjnym z modelu (9). Wektor zmiennych instrumentalnych ma teraz postać:

$$\mathbf{z}^\top(n) \triangleq [-x(n-1) \ -x(n-2) \ \dots \ -x(n-n_a) \ u(n-1) \ u(n-2) \ \dots \ u(n-n_b)], \quad (18)$$

którego struktura jest analogiczna do struktury wektora regresji  $\boldsymbol{\varphi}^\top(n)$ , z tą różnicą, że próbki wyjścia  $y$  zostały podmienione próbkami  $x$  liczonymi wg wzoru (17). Z równania (17) wynika, że



Rysunek 2: Schemat dwuetapowej procedury identyfikacji metodą IV, gdy zmienne instrumentalne  $\mathbf{z}(n)$  wyznaczone są na podstawie definicji (18) i wzoru (17)

$x(n)$  jest po prostu bieżącą próbką odpowiedzi modelu symulowanego obliczaną na podstawie przyjętej struktury modelu (9) z wejściem  $u(n)$  brany z wejścia systemu i z wektorem estymat obliczonym uprzednio na podstawie metody LS. Zatem identyfikacja ma tutaj charakter dwuetapowy LS→IV|LS zilustrowany na rys. 2. Definicja (18) pozwala na skuteczne zastosowanie metody IV i uzyskanie estymat  $\hat{\mathbf{p}}_N^{\text{IV}}$  bliższych wartościom prawdziwym  $\mathbf{p}_o$  (w porównaniu z  $\hat{\mathbf{p}}_N^{\text{LS}}$ ) pomimo, że zakłócenie  $v(n)$  w (15) nie jest szumem białym.

---

#### Informacje na temat danych pomiarowych zawartych w pliku IdentWsadowaDyn.mat:

- postaci macierzy z danymi: DaneDynW=[u yw], DaneDynC=[u yc]
  - horyzont czasowy symulacji: t=0:Tp:(N-1)\*Tp, N=4001, okres próbkowania Tp=0.01 s
  - struktura transmitancji toru sterowania systemu:  $G_o(s, \mathbf{p}_o^c) = k_o/(1+sT_o) = k_o/A_o(s, T_o)$
  - prawdziwe parametry identyfikowanego systemu czasu ciągłego:  $k_o = 2.0$ ,  $T_o = 0.5$
  - zastosowany sygnał pobudzający:  $u(t) = 0.2 \sin(5t) + 0.1 \sin(2t) + 0.5 \cos(2t)$
  - sposób generowania zakłócenia białego dla danych pomiarowych:  $[v(t)] = H(s)[e_E(t)]$ , gdzie  $H(s) := 1/A_o(s, T_o) \Rightarrow \mathbf{v} = \text{lsim}(H, \mathbf{e}, t, \text{'zoh'})$ ,  $\mathbf{e} = \text{randn}(N, 1)$
  - sposób generowania zakłócenia kolorowego dla danych pomiarowych:  $[v(t)] = H(s)[e_E(t)]$  dla  $H(s) := 0.5/(1 + 0.05s) \Rightarrow \mathbf{v} = \text{lsim}(H, \mathbf{e}, t, \text{'zoh'})$ ,  $\mathbf{e} = \text{randn}(N, 1)$
  - sposób generowania zakłóconej odpowiedzi systemu:  $\mathbf{y} = \text{lsim}(G_o, \mathbf{u}, t, \text{'zoh'}) + \mathbf{v}$
- 

### 2.1 Identyfikacja parametrów modelu czasu dyskretnego metodą LS.

- Struktura transmitancji  $G_o(s)$  toru sterowania pewnego rzeczywistego systemu czasu ciągłego i jego model czasu dyskretnego są opisane w następujący sposób:

$$G_o(s, \mathbf{p}_o^c) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_o}{T_o s + 1} \xrightarrow{\text{dyskret.}} G(z, \mathbf{p}) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{k(1 - e^{-T_p/T})}{z - e^{-T_p/T}}, \quad (19)$$

gdzie  $\mathbf{p}_o^c = [k_o \ T_o]^\top$  jest wektorem nieznanych prawdziwych parametrów systemu, natomiast strukturę modelu czasu dyskretnego reprezentowanego transmitancją  $G(z, \mathbf{p})$  wyznaczono metodą 'zoh' (transformacja skokowo-inwariantna). Na podstawie transmitancji  $G(z, \mathbf{p})$  możemy zapisać model czasu dyskretnego systemu z użyciem operatora  $q^{-1}$  w postaci

$$y(n) = G(q^{-1}, \mathbf{p})u(n) + v(n), \quad (20)$$

gdzie  $v(n)$  reprezentuje zakłócenie stochastyczne (o nieznanym właściwościach).

- Na podstawie transmitancji (19) zapisać model (20) i przepisać go w postaci regresji liniowej wyróżniając regresor oraz wektor parametrów zastępczych modelu.
- Plik `IdentWsadowaDyn.mat` zawiera dane pomiarowe  $Z^N = \{u(nT_p), y(nT_p)\}_{n=0}^{N-1}$  zapisane w dwóch macierzach `DaneDynW` i `DaneDynC`, przy czym pierwsza z nich zawiera pomiary z zakłóceniem białym, a druga z zakłóceniem kolorowym. Wprowadzić dane do przestrzeni roboczej Matlaba instrukcją `load IdentWsadowaDyn.mat`; wyświetlić dane pomiarowe i dokonać ich oglądu. Dane z obu macierzy podzielić na dwa podzbiory (np. w proporcji 50% do 50%):  $Z_{\text{est}}$  używane do estymacji parametrów (dane estymacyjne) oraz  $Z_{\text{wer}}$  używane do weryfikacji modelu (dane weryfikacyjne).
- Zapisując strukturę modelu (20) w klasie modeli ARX przeprowadzić identyfikację parametryczną modelu stosując estymator (12) oraz zbiór danych  $Z_{\text{est}}$ . Obliczenia wykonać niezależnie dla przypadku zakłócenia białego i kolorowego.
- Na podstawie wyznaczonego wektora  $\hat{\mathbf{p}}_N^{\text{LS}}$  zrekonstruować estymaty  $\hat{k}$  oraz  $\hat{T}$  parametrów systemu czasu ciągłego. Porównać  $\hat{k}$  i  $\hat{T}$  z parametrami  $k_o$  oraz  $T_o$ .
- Zilustrować na wspólnym wykresie (w dziedzinie czasu):
  - zmierzoną odpowiedź  $y(n)$  systemu ze zbioru  $Z_{\text{wer}}$ ,
  - niezakłóconą odpowiedź  $y_o(n)$  systemu (w praktyce niedostępną!) na wymuszenie  $u(n)$  z danych  $Z_{\text{wer}}$ ,
  - odpowiedź predyktora jednokrokowego  $\hat{y}(n|n-1)$  dla  $y(n)$  oraz wymuszenia  $u(n)$  wziętych z danych  $Z_{\text{wer}}$ ,
  - odpowiedź modelu symulowanego  $y_m(n)$  na wymuszenie  $u(n)$  z danych  $Z_{\text{wer}}$ .

Ocenić jakościowo oraz ilościowo wynik identyfikacji; do oceny ilościowej obliczyć wartości wskaźników:

$$V_p \triangleq \frac{1}{N_v} \sum_{n=1}^{N_v} [y(n) - \hat{y}(n|n-1)]^2, \quad V_m \triangleq \frac{1}{N_v} \sum_{n=1}^{N_v} [y_o(n) - y_m(n)]^2, \quad (21)$$

gdzie  $N_v$  oznacza liczbę danych ze zbioru  $Z_{\text{wer}}$ . Porównać obliczone wartości wskaźników dla identyfikacji na podstawie danych z macierzy `DaneDynW` i `DaneDynC`.

- Dla przypadku danych z zakłóceniem białym wyznaczyć i zinterpretować macierz kowariancji (14) oraz przedziały ufności dla estymat  $\hat{\mathbf{p}}_N^{\text{LS}}$  (patrz: Uwaga 1, str. 7).

## 2.2 Identyfikacja parametrów modelu czasu dyskretnego metodą IV.

- Wykorzystując dane pomiarowe zapisane w macierzy `DaneDynC` przeprowadzić identyfikację parametryczną systemu stosując model (20) i estymator IV ze wzoru (16) dla danych ze zbioru  $Z_{\text{est}}$ . W tym celu utworzyć wektor zmiennych instrumentalnych  $\mathbf{z}(n)$  a następnie macierz  $\mathbf{Z}$ ; do uzyskania zmiennych instrumentalnych wykorzystać metodę opisaną wzorami (17)-(18).
- Na podstawie wyznaczonego wektora  $\hat{\mathbf{p}}_N^{\text{IV}}$  zrekonstruować estymaty  $\hat{k}$  oraz  $\hat{T}$  parametrów systemu czasu ciągłego. Porównać  $\hat{k}$  i  $\hat{T}$  z parametrami  $k_o$  oraz  $T_o$ .
- Dla wyników identyfikacji metodą IV (analogicznie jak w przypadku identyfikacji metodą LS) zilustrować na wspólnym wykresie (w dziedzinie czasu) przebiegi sygnałów:  $y(n)$ ,  $y_o(n)$ ,  $\hat{y}(n|n-1)$  oraz  $y_m(n)$  dla  $y(n)$  oraz wymuszenia  $u(n)$  wziętych z danych  $Z_{\text{wer}}$ . Ocenić jakościowo oraz ilościowo wynik identyfikacji; do oceny ilościowej obliczyć wskaźniki (21) i porównać ich wartości z tymi uzyskanymi po identyfikacji metodą LS (dla danych z macierzy `DaneDynC`).

**Uwaga 1** Dla nieobciążonego estymatora metody LS w przypadku regresora deterministycznego oraz dla danych zakłóconych szumem białym i przy założeniu bardzo dużej liczby pomiarów  $N$  (a w praktyce  $N \geq 300$ ) możemy zapisać:

$$(\hat{\mathbf{p}}_N^{LS} - \mathbf{p}_o) \in \mathcal{N}(\mathbf{0}, \hat{\mathbf{P}}_N) \quad \Rightarrow \quad (\hat{p}_{Ni}^{LS} - p_{io}) \in \mathcal{N}(0, \hat{P}_{Nii}), \quad i = 1, \dots, d_p \quad (22)$$

gdzie  $N$  jest liczbą danych użytych do estymacji, natomiast  $\hat{P}_{Nii}$  jest  $i$ -tym elementem diagonalnej macierzy  $\hat{\mathbf{P}}_N = \hat{\sigma}^2(\mathbf{\Phi}^\top \mathbf{\Phi})^{-1}$  (jest to oszacowana macierz  $\text{Cov}[\hat{\mathbf{p}}_N^{LS}]$  na podstawie  $N$  pomiarów, por. wzór (5)). Wiedząc, że dla zmiennej losowej  $X \in \mathcal{N}(m, \text{var})$  zachodzą następujące związki:

$$P(|X - m| < 1.96\sqrt{\text{var}}) = 0.95, \quad P(|X - m| < 2.58\sqrt{\text{var}}) = 0.99$$

wzór na 95% przedział ufności parametru  $p_{io}$  przyjmuje (zgodnie z (22)) następującą postać:

$$PU_{95\%}: \left( \hat{p}_{Ni}^{LS} - 1.96\sqrt{\hat{P}_{Nii}} \quad ; \quad \hat{p}_{Ni}^{LS} + 1.96\sqrt{\hat{P}_{Nii}} \right). \quad (23)$$

Dla zgodnego estymatora metody LS w przypadku regresora stochastycznego, zakładając bardzo dużą (lecz skończoną) liczbę pomiarów  $N$  (a w praktyce  $N \geq 300$ ), możemy zapisać:

$$\sqrt{N}(\hat{\mathbf{p}}_N^{LS} - \mathbf{p}_o) \in \mathcal{N}(\mathbf{0}, \hat{\mathbf{P}}_\infty) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{N}(\hat{p}_{Ni}^{LS} - p_{io}) \in \mathcal{N}(0, \hat{P}_{\infty ii}) \quad (24)$$

gdzie  $N$  jest liczbą danych użytych do estymacji, natomiast  $\hat{P}_{\infty ii}$  jest  $i$ -tym elementem diagonalnej macierzy  $\hat{\mathbf{P}}_\infty = \hat{\sigma}^2(\sum_{n=1}^N \boldsymbol{\varphi}_n^\top \boldsymbol{\varphi}_n / N)^{-1} = N\hat{\sigma}^2(\mathbf{\Phi}^\top \mathbf{\Phi})^{-1}$  (jest to oszacowana na podstawie skończonej liczby  $N$  pomiarów teoretyczna macierz  $\mathbf{P}_\infty = \sigma_o^2 [\mathbb{E}[\boldsymbol{\varphi}_n \boldsymbol{\varphi}_n^\top]]^{-1}$ ). Poprzez analogię do postaci (23), 95% przedział ufności parametru  $p_{0i}$  przyjmuje teraz postać:

$$PU_{95\%}: \left( \hat{p}_{Ni}^{LS} - 1.96\sqrt{\frac{\hat{P}_{\infty ii}}{N}} \quad ; \quad \hat{p}_{Ni}^{LS} + 1.96\sqrt{\frac{\hat{P}_{\infty ii}}{N}} \right). \quad (25)$$

$PU_{95\%}$  pokrywa wartość prawdziwą  $p_{io}$  z prawdopodobieństwem 0.95. Jeśli określony  $PU_{95\%}$  dla parametru  $p_{io}$  zawiera wartość zerową, wówczas należy rozważyć eliminację danego parametru ze struktury modelu. Gdy wariancje są duże dla każdej estymaty  $\hat{p}_{Ni}^{LS}$ , to prawdopodobnie rząd modelu powinien zostać zredukowany.

### 3 Identyfikacja bezpośrednia systemu dynamicznego czasu ciągłego metodą LS

Identyfikacja bezpośrednia systemu czasu ciągłego

$$[y(t)] = G_o(s, \mathbf{p}_o^c)[u(t)] + [v(t)] = \frac{B_o(s, \mathbf{p}_o^c)}{A_o(s, \mathbf{p}_o^c)}[u(t)] + [v(t)], \quad (26)$$

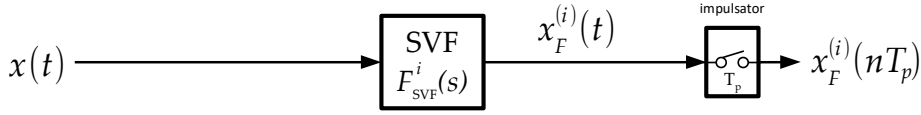
gdzie  $\deg A_o = n_a$  i  $\deg B_o = n_b$ , nie wymaga użycia modelu czasu dyskretnego – parametry modelu czasu ciągłego są w tym podejściu estymowane bezpośrednio z danych spróbkowanych. W tym celu równanie różniczkowe modelu czasu ciągłego zapisuje się w postaci regresji liniowej

$$y^{(n_a)}(t) = [-y^{(n_a-1)}(t) \dots - y(t) \quad u^{(n_b)}(t) \dots u(t)]\mathbf{p} + v^*(t), \quad (27)$$

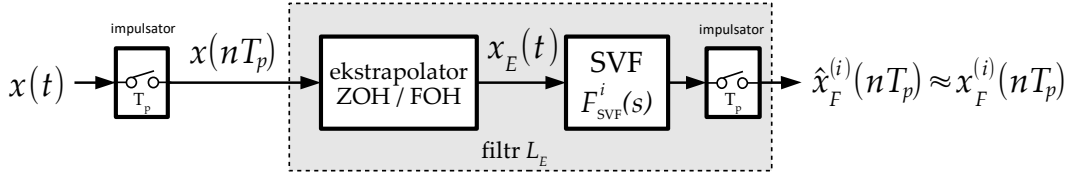
gdzie  $\mathbf{p} = [a_1 \dots a_{n_a} \ b_0 \dots b_{n_b}]^\top$  jest wektorem parametrów modelu czasu ciągłego o wymiarze  $\dim(\mathbf{p}) = n_a + n_b + 1$ , a  $v^*(t)$  jest zakłóceniem stochastycznym. Aby umożliwić praktyczną realizację obliczeń estymacji parametrycznej wprowadza się filtry SVF (ang. *State Variable Filter*)

$$F_{\text{SVF}}^i(s) \triangleq \frac{s^i}{(1 + sT_F)^{n_F}}, \quad T_F > 0, \quad n_F \geq n_a, \quad (28)$$

(a) schemat klasycznej filtracji SVF:



(b) schemat (aproksymowanej) filtracji SVF dla danych próbkowanych:



Rysunek 3: Porównanie klasycznej koncepcji analogowej filtracji SVF sygnału  $x(t)$  (schemat (a)) z aproksymowaną filtracją SVF sekwencji próbek  $\{x(nT_p)\}$  (schemat (b)); 'impuls.' oznacza impulsator, natomiast ZOH/FOH oznaczają ekstrapolację zerowego rzędu / pierwszego rzędu. Symbol  $x_E(t)$  na schemacie (b) oznacza sygnał analogowy powstały z ekstrapolacji (interpolacji) sekwencji  $\{x(nT_p)\}$

które (zastosowane do obu stron równania (27)) pozwalają na przepisanie równania (27) w postaci dogodnej do identyfikacji (z danymi próbkowanymi z częstotliwością  $f_p = 1/T_p$ ):

$$\mathcal{Y}(nT_p) = \underbrace{[-y_F^{(n_a-1)}(nT_p) \ \dots \ -y_F(nT_p) \ \ u_F^{(n_b)}(nT_p) \ \dots \ u_F(nT_p)]}_{\varphi^\top(nT_p)} \mathbf{p} + \xi(nT_p), \quad (29)$$

gdzie

$$\mathcal{Y}(nT_p) \triangleq y_F^{(n_a)}(nT_p) \quad (30)$$

jest **umownym** (zatem nie jedynym możliwym!) wyjściem w modelu (29), a ponadto

$$\xi(nT_p) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ F_{SVF}^0(s) [v^*(t)] \right\} \Big|_{t=nT_p}$$

jest filtrowanym (dolnoprzepustowo) i spróbkowanym zakłóceniem stochastycznym (symbol  $\mathcal{L}^{-1}$  oznacza odwrotne przekształcenie Laplace'a), natomiast

$$y_F^{(i)}(nT_p) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ F_{SVF}^i(s) [y(t)] \right\} \Big|_{t=nT_p}, \quad i = 0, 1, \dots, n_a, \quad (31)$$

$$u_F^{(i)}(nT_p) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ F_{SVF}^i(s) [u(t)] \right\} \Big|_{t=nT_p}, \quad i = 0, 1, \dots, n_b, \quad (32)$$

są analogowo filtrowanymi sygnałami  $y(t)$  oraz  $u(t)$  (pochodzącymi z wyjścia i wejścia systemu czasu ciągłego) a następnie spróbkowanymi z okresem próbkowania  $T_p$ .

Zależności (31)-(32) wyjaśniają sposób generowania składowych wektora regresji oraz elementu  $\mathcal{Y}$ , zwanego **umownym wyjściem**, po lewej stronie równania (29). Generowanie wspomnianych sygnałów wymaga analogowej filtracji wyjścia  $y(t)$  oraz wejścia  $u(t)$ , co może być niemożliwe lub uciążliwe w praktycznych zastosowaniach. Dlatego, jeżeli w praktyce dysponujemy zbiorem danych spróbkowanych  $\mathbf{Z}^N = \{y(nT_p), u(nT_p)\}_{n=0}^{N-1}$  i chcielibyśmy wykorzystać metodykę filtrów SVF, wówczas należy aproksymować filtrację analogową po stronie cyfrowej (w dziedzinie czasu dyskretnego). Do tego celu można użyć funkcji Matlaba `lsim(F,x,tn)`, gdzie pierwszy argument oznacza transmitancję analogowego filtra  $F(s)$ , drugi argument to wektor (sekwencja  $\{x(nT_p)\}$ ) próbek sygnału  $x$  podlegającego filtracji, a trzeci to odpowiadający mu wektor (sekwencja) dyskretnych chwil czasu, dla których filtracja ma zostać wykonana (zatem drugi i trzeci argument funkcji `lsim()` są określone w dyskretniej dziedzinie czasu, natomiast struktura filtra  $F$  odpowiada ciągłej dziedzinie czasu). Porównanie analogowej filtracji SVF z jej wersją aproksymowaną wykonywaną dla danych spróbkowanych przedstawia rys. 3.

Zapis modelu w postaci regresji liniowej (29), łącznie z użyciem (aproksymowanej) filtracji SVF, umożliwia zastosowanie estymatora LS z równania (12) zastępując wektor pomiarowy  $\mathbf{y}$  wektorem  $\mathcal{Y}$  wartości umownego wyjścia  $\mathcal{Y}$  zdefiniowanego w (30).



Stałą czasową  $T_F$  filtrów SVF należy wybrać doświadczalnie, np. zaczynając od wartości  $T_F = 2T_p$  i zwiększając ją o wartość okresu próbkowania  $T_p$  aż do uzyskania zadowalających efektów estymacji parametrycznej. Generalnie, pasmo przenoszenia filtru  $F_{SVF}^0(s)$  powinno być w przybliżeniu równe pasmu przenoszenia identyfikowanego systemu (26). Zatem jeżeli znamy (z wiedzy wstępnej) pulsację odcięcia  $\omega_c$  systemu, wówczas możemy przyjąć  $T_F \approx 1/\omega_c$ .

### 3.1 Bezpośrednia identyfikacja parametrów modelu czasu ciągłego metodą LS.

- We wzorze (19) dany jest opis struktury toru sterowania  $G_o(s, \mathbf{p}_o^c)$  prawdziwego systemu czasu ciągłego; równanie generujące dane ma postać (26).
- Zdefiniować filtry SVF (minimalnego rzędu) i zapisać model systemu czasu ciągłego w postaci regresji liniowej (29).
- Dla filtrów SVF wybrać wartość stałej czasowej  $T_F = 50T_p$  (wartość  $T_F$  nie może być zbyt duża, aby nie usuwać z filtrowanych danych użytecznej informacji o identyfikowanym systemie!). Wykonać aproksymowane filtracje SVF danych pomiarowych ze zbioru  $Z_{est}$  wziętych z macierzy `DaneDynW` (plik `IdentWsadowaDyn.mat`). W tym celu skorzystać z funkcji `lsim()` Matlaba. Przy stosowaniu funkcji `lsim()` wymusić ekstrapolację 'foh' dla sekwencji próbek  $\{y(nT_p)\}$  oraz  $\{u(nT_p)\}$ . Wektor dyskretnych chwil czasu, wymagany jako jeden z parametrów funkcji `lsim()`, należy utworzyć wiedząc, że dane próbkowano w okresie  $T_p = 0.01$  s oraz liczba danych  $N = 4001$  par próbek.
- Dla danych ze zbioru  $Z_{est}$  przeprowadzić bezpośrednią identyfikację parametryczną systemu stosując model (29) i estymator LS postaci  $\hat{\mathbf{p}}_N^{LS} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathcal{Y}$ , gdzie  $\mathcal{Y} = [\mathcal{Y}(t^* + T_p) \quad \mathcal{Y}(t^* + 2T_p) \quad \dots \quad \mathcal{Y}(t^* + MT_p)]^T$ ,  $t^* = n^*T_p$ ,  $n^* \geq 0$ .
- Porównać otrzymaną estymatę  $\hat{\mathbf{p}}_N^{LS}$  z parametrami prawdziwymi  $\mathbf{p}_o^c$ .
- Sprawdzić wpływ liczebności i zakresu danych w  $Z_{est}$  na jakość identyfikacji.
- Sprawdzić wpływ wartości  $T_F \in \{5T_p, 50T_p, 500T_p\}$  na jakość identyfikacji.
- Sprawdzić wpływ rzędu filtrów SVF na jakość identyfikacji dla  $n_F \in \{1, 2, 3\}$ .
- Porównać jakość identyfikacji uzyskiwaną dla dwóch alternatywnych postaci regresji liniowej modelu – biorąc za umowne wyjście  $\mathcal{Y} \triangleq y_F^{(1)}$  lub  $\mathcal{Y} \triangleq y_F$ .

**Uwaga:** Poniżej podano fragment kodu programu w języku Matlab ilustrujący sposób aproksymowanej filtracji SVF, tj. filtracji SVF interpolowanych sekwencji próbek ze zbioru  $Z_{est}$ .

```
%*****
%----- filtracja SVF interpolowanych danych spróbkowanych: -----
%*****
M = 3200; % wybór liczby danych do zbioru Ze
tE = Tp*(N-M:N)'; % wektor próbek chwil czasowych dla danych estymujących
uE = DaneDynW(N-M:N,1); % wybór wektora próbek sygnału pobudzającego u do zbioru Ze
yE = DaneDynW(N-M:N,2); % wybór wektora próbek sygnału wyjściowego y do zbioru Ze
s = tf('s'); % zmienna operatorowa Laplace'a
TF = 40*Tp; % wybór wartości stałej czasowej dla filtrów SVF
nF = 1; % wybór rzędu dynamiki dla filtrów SVF
F0 = 1/(1+s*TF)^nF; % definicja filtru SFV typu F^0
F1 = s/(1+s*TF)^nF; % definicja filtru SFV typu F^1
yF = lsim(F0,yE,tE,'foh'); % filtracja SVF filtrem F^0 sekwencji yE z ekstrapolacją 'foh'
ypF = lsim(F1,yE,tE,'foh'); % filtracja SVF filtrem F^1 sekwencji yE z ekstrapolacją 'foh'
uF = lsim(F0,uE,tE,'foh'); % filtracja SVF filtrem F^0 sekwencji uE z ekstrapolacją 'foh'
%*****
```