Dr Maciej Grzesiak, Instytut Matematyki

Dr Maciej Grzesiak, pok.724 E

e-mail: maciej.grzesiak@put.poznan.pl

http://www.maciej.grzesiak.pracownik.put.poznan.pl

podręcznik: Liczby zespolone i algebra liniowa

Treść wykładu

- Ciało liczbowe
- Działanie w zbiorze
- Ogólne pojęcie ciała
- Ciało skończone
- Liczby zespolone

Muhammad ibn Musa
al Chwarizmi (ok. 790-850)

Od jego nazwiska pochodzi nazwa algorytm, a od dzieła *Hisab al-jabr w'al-muqabala* termin algebra. Był też jednym z pierwszych, którzy wykorzystywali pojęcie zera i cyfrę 0 w zapisie pozycyjnym.

Wykonalność działań w zbiorach liczb

Mówimy, że w zbiorze liczb X jest wykonalne dodawanie, jeśli dla każdej pary liczb $x_1, x_2 \in X$ prawdziwe jest

$$x_1 + x_2 \in X.$$

Wykonalność działań w zbiorach liczb

Mówimy, że w zbiorze liczb X jest wykonalne dodawanie, jeśli dla każdej pary liczb $x_1, x_2 \in X$ prawdziwe jest

$$x_1 + x_2 \in X.$$

Podobnie rozumiemy wykonalność odejmowania i mnożenia oraz dzielenia przez liczbę różną od zera.

Wykonalność działań w zbiorach liczb

Mówimy, że w zbiorze liczb X jest wykonalne dodawanie, jeśli dla każdej pary liczb $x_1, x_2 \in X$ prawdziwe jest

$$x_1 + x_2 \in X.$$

Podobnie rozumiemy wykonalność odejmowania i mnożenia oraz dzielenia przez liczbę różną od zera.

- W zbiorze $\mathbb{N}$ wykonalne jest tylko dodawanie i mnożenie.

Wykonalność działań w zbiorach liczb

Mówimy, że w zbiorze liczb X jest wykonalne dodawanie, jeśli dla każdej pary liczb $x_1, x_2 \in X$ prawdziwe jest

$$x_1 + x_2 \in X.$$

Podobnie rozumiemy wykonalność odejmowania i mnożenia oraz dzielenia przez liczbę różną od zera.

- W zbiorze $\mathbb{N}$ wykonalne jest tylko dodawanie i mnożenie.
- W $\mathbb{Z}$ wykonalne jest dodawanie, odejmowanie i mnożenie.

Wykonalność działań w zbiorach liczb

Mówimy, że w zbiorze liczb X jest wykonalne dodawanie, jeśli dla każdej pary liczb $x_1, x_2 \in X$ prawdziwe jest

$$x_1 + x_2 \in X.$$

Podobnie rozumiemy wykonalność odejmowania i mnożenia oraz dzielenia przez liczbę różną od zera.

- W zbiorze $\mathbb{N}$ wykonalne jest tylko dodawanie i mnożenie.
- W $\mathbb{Z}$ wykonalne jest dodawanie, odejmowanie i mnożenie.
- W $\mathbb{Q}$ wykonalne jest dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie.

Wykonalność działań w zbiorach liczb

Mówimy, że w zbiorze liczb X jest wykonalne dodawanie, jeśli dla każdej pary liczb $x_1, x_2 \in X$ prawdziwe jest

$$x_1 + x_2 \in X.$$

Podobnie rozumiemy wykonalność odejmowania i mnożenia oraz dzielenia przez liczbę różną od zera.

- W zbiorze $\mathbb{N}$ wykonalne jest tylko dodawanie i mnożenie.
- W $\mathbb{Z}$ wykonalne jest dodawanie, odejmowanie i mnożenie.
- W $\mathbb{Q}$ wykonalne jest dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie.
- W przedziale $[0, 1]$ wykonalne jest tylko mnożenie.

Ciało liczbowe

Definicja

Każdy zbiór liczb, który zawiera więcej niż jedną liczbę i w którym są wykonalne wszystkie cztery działania z wyjątkiem dzielenia przez 0*, nazywamy ciałem liczbowym.*

Ciało liczbowe

Definicja

Każdy zbiór liczb, który zawiera więcej niż jedną liczbę i w którym są wykonalne wszystkie cztery działania z wyjątkiem dzielenia przez 0*, nazywamy* ***ciałem liczbowym****.*

- Zbiory $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ nie są ciałami.

Ciało liczbowe

Definicja

Każdy zbiór liczb, który zawiera więcej niż jedną liczbę i w którym są wykonalne wszystkie cztery działania z wyjątkiem dzielenia przez 0, nazywamy ciałem liczbowym.

- Zbiory $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ nie są ciałami.
- Zbiór $\mathbb{Q}$ jest ciałem.

Ciało liczbowe

Definicja

Każdy zbiór liczb, który zawiera więcej niż jedną liczbę i w którym są wykonalne wszystkie cztery działania z wyjątkiem dzielenia przez 0*, nazywamy* ***ciałem liczbowym****.*

- Zbiory $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ nie są ciałami.
- Zbiór $\mathbb{Q}$ jest ciałem.
- Zbiór $\mathbb{R}$ jest ciałem.

Fakt

Zbiór liczb postaci $a + b\sqrt{2}$*, gdzie* $a, b \in \mathbb{Q}$ *jest ciałem liczbowym.*

Fakt

Zbiór liczb postaci $a + b\sqrt{2}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$ jest ciałem liczbowym.

Wiadomo,że wyniki działań na takich liczbach są również postaci $a + b\sqrt{2}$.

Twierdzenie

Niech D będzie ustaloną liczbą wymierną dodatnią, która nie jest kwadratem liczby wymiernej. Zbiór liczb postaci $a + b\sqrt{D}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$, jest ciałem.

Twierdzenie

Niech D będzie ustaloną liczbą wymierną dodatnią, która nie jest kwadratem liczby wymiernej. Zbiór liczb postaci $a + b\sqrt{D}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$, jest ciałem.

Wniosek: istnieje nieskończenie wiele ciał liczbowych.

Twierdzenie

Każde ciało liczbowe $\mathbb{K}$ *zawiera ciało liczb wymiernych.*

Dowód

- $\mathbb{K}$ jest ciałem, więc zawiera liczbę $a \neq 0$.

Dowód

- $\mathbb{K}$ jest ciałem, więc zawiera liczbę $a \neq 0$.
- Możemy wykonać dzielenie, więc $a/a = 1 \in \mathbb{K}$.

Dowód

- $\mathbb{K}$ jest ciałem, więc zawiera liczbę $a \neq 0$.
- Możemy wykonać dzielenie, więc $a/a = 1 \in \mathbb{K}$.
  Stąd na podstawie wykonalności dodawania $2 = 1 + 1 \in \mathbb{K}$,
  $3 = 2 + 1 \in \mathbb{K}$ itd;

Dowód

- $\mathbb{K}$ jest ciałem, więc zawiera liczbę $a \neq 0$.
- Możemy wykonać dzielenie, więc $a/a = 1 \in \mathbb{K}$.
  Stąd na podstawie wykonalności dodawania $2 = 1 + 1 \in \mathbb{K}$, $3 = 2 + 1 \in \mathbb{K}$ itd;
- ogólnie, $n \in \mathbb{K}$ dla dowolnej liczby naturalnej n.

Dowód

- $\mathbb{K}$ jest ciałem, więc zawiera liczbę $a \neq 0$.
- Możemy wykonać dzielenie, więc $a/a = 1 \in \mathbb{K}$.
  Stąd na podstawie wykonalności dodawania $2 = 1 + 1 \in \mathbb{K}$,
  $3 = 2 + 1 \in \mathbb{K}$ itd;
- ogólnie, $n \in \mathbb{K}$ dla dowolnej liczby naturalnej n.
- Z wykonalności odejmowania $1 - 1 = 0 \in \mathbb{K}$, a stąd dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, $-n \in \mathbb{K}$.

Dowód

- $\mathbb{K}$ jest ciałem, więc zawiera liczbę $a \neq 0$.
- Możemy wykonać dzielenie, więc $a/a = 1 \in \mathbb{K}$.
  Stąd na podstawie wykonalności dodawania $2 = 1 + 1 \in \mathbb{K}$, $3 = 2 + 1 \in \mathbb{K}$ itd;
- ogólnie, $n \in \mathbb{K}$ dla dowolnej liczby naturalnej n.
- Z wykonalności odejmowania $1 - 1 = 0 \in \mathbb{K}$, a stąd dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, $-n \in \mathbb{K}$.
- Z wykonalności dzielenia dla dowolnych liczb naturalnych n i m wynika, że $n/m \in \mathbb{K}$, $-n/m \in \mathbb{K}$

Dowód

- $\mathbb{K}$ jest ciałem, więc zawiera liczbę $a \neq 0$.
- Możemy wykonać dzielenie, więc $a/a = 1 \in \mathbb{K}$.
  Stąd na podstawie wykonalności dodawania $2 = 1 + 1 \in \mathbb{K}$, $3 = 2 + 1 \in \mathbb{K}$ itd;
- ogólnie, $n \in \mathbb{K}$ dla dowolnej liczby naturalnej n.
- Z wykonalności odejmowania $1 - 1 = 0 \in \mathbb{K}$, a stąd dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, $-n \in \mathbb{K}$.
- Z wykonalności dzielenia dla dowolnych liczb naturalnych n i m wynika, że $n/m \in \mathbb{K}$, $-n/m \in \mathbb{K}$
- a więc $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$

Wniosek

Ciało $\mathbb{Q}$ *jest najmniejszym ciałem liczbowym.*

Wniosek

Ciało $\mathbb{Q}$ jest najmniejszym ciałem liczbowym.

W szczególności oznacza to, że skończony zbiór liczb nie może być ciałem.

Działanie w zbiorze

Definicja

Działaniem w zbiorze $\mathbb{K}$ *nazywamy funkcję h, która każdej parze* a, b *elementów zbioru* $\mathbb{K}$ *przyporządkowuje pewien element tego samego zbioru:* $h : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$.

Działanie w zbiorze

Definicja

Działaniem w zbiorze $\mathbb{K}$ *nazywamy funkcję h, która każdej parze* a, b *elementów zbioru* $\mathbb{K}$ *przyporządkowuje pewien element tego samego zbioru:* $h : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$.

Na przykład dodawanie liczb rzeczywistych jest funkcją $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ przyporządkowującą parze liczb x, y ich sumę $x + y$. Znak $+$ jest symbolem tego działania.

Działanie w zbiorze

Definicja

Działaniem w zbiorze $\mathbb{K}$ *nazywamy funkcję h, która każdej parze* a, b *elementów zbioru* $\mathbb{K}$ *przyporządkowuje pewien element tego samego zbioru:* $h : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$.

Na przykład dodawanie liczb rzeczywistych jest funkcją $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ przyporządkowującą parze liczb x, y ich sumę $x + y$. Znak $+$ jest symbolem tego działania.
Niech $\mathbb{K}$ będzie zbiorem wektorów na płaszczyźnie. Dla dowolnych dwóch wektorów istnieje ich suma: jest to działanie.

Działanie w zbiorze

Definicja

Działaniem w zbiorze $\mathbb{K}$ *nazywamy funkcję* h*, która każdej parze* a, b *elementów zbioru* $\mathbb{K}$ *przyporządkowuje pewien element tego samego zbioru:* $h : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$.

Na przykład dodawanie liczb rzeczywistych jest funkcją $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ przyporządkowującą parze liczb x, y ich sumę $x + y$. Znak $+$ jest symbolem tego działania.
Niech $\mathbb{K}$ będzie zbiorem wektorów na płaszczyźnie. Dla dowolnych dwóch wektorów istnieje ich suma: jest to działanie.
Składanie funkcji jest działaniem w niektórych zbiorach funkcji (np. w zbiorze wielomianów), ale nie w zbiorze wszystkich funkcji, bo nie zawsze istnieje złożenie.

Dodawanie i mnożenie liczb mają własności:

1. łączność

Dodawanie i mnożenie liczb mają własności:

1. łączność
2. przemienność

Dodawanie i mnożenie liczb mają własności:

1. łączność
2. przemienność
3. istnieje dla tych działań element neutralny (0 dla dodawania, 1 dla mnożenia)

Dodawanie i mnożenie liczb mają własności:

1. łączność
2. przemienność
3. istnieje dla tych działań element neutralny (0 dla dodawania, 1 dla mnożenia)
4. dla każdej liczby x istnieje element przeciwny $-x$ oraz (dla $x \neq 0$) element odwrotny x^{-1}.

Określenie ciała

Załóżmy, że mamy zbiór $\mathbb{K}$, w którym są określone dwa działania $\oplus$ i $\odot$ mające własności:

Określenie ciała

1. $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ (dodawanie jest łączne),
2. $x \oplus y = y \oplus x$ (dodawanie jest przemienne),
3. $0 \oplus x = x \oplus 0 = x$ (istnieje w $\mathbb{K}$ element zerowy 0),
4. $x \oplus (-x) = 0$ (dla każdego elementu x istnieje element przeciwny $-x$),

Określenie ciała

1. $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ (dodawanie jest łączne),
2. $x \oplus y = y \oplus x$ (dodawanie jest przemienne),
3. $0 \oplus x = x \oplus 0 = x$ (istnieje w $\mathbb{K}$ element zerowy 0),
4. $x \oplus (-x) = 0$ (dla każdego elementu x istnieje element przeciwny $-x$),
5. $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$ (mnożenie jest łączne),
6. $x \odot y = y \odot x$ (mnożenie jest przemienne),
7. $1 \odot x = x \odot 1 = x$ (istnieje w $\mathbb{K}$ element jednostkowy $1 \neq 0$),
8. $x \odot x^{-1} = x^{-1} \odot x = 1$ (dla $x \neq 0$ istnieje element odwrotny x^{-1}),

Określenie ciała

1. $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ (dodawanie jest łączne),
2. $x \oplus y = y \oplus x$ (dodawanie jest przemienne),
3. $0 \oplus x = x \oplus 0 = x$ (istnieje w $\mathbb{K}$ element zerowy 0),
4. $x \oplus (-x) = 0$ (dla każdego elementu x istnieje element przeciwny $-x$),
5. $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$ (mnożenie jest łączne),
6. $x \odot y = y \odot x$ (mnożenie jest przemienne),
7. $1 \odot x = x \odot 1 = x$ (istnieje w $\mathbb{K}$ element jednostkowy $1 \neq 0$),
8. $x \odot x^{-1} = x^{-1} \odot x = 1$ (dla $x \neq 0$ istnieje element odwrotny x^{-1}),
9. $x \odot (y \oplus z) = x \odot y \oplus x \odot z$ (mnożenie jest rozdzielne względem dodawania),

Określenie ciała

Definicja

Niech będzie dany zbiór $\mathbb{K}$, w którym są określone dwa działania $\oplus$ i $\odot$ zwane odpowiednio dodawaniem i mnożeniem. Jeżeli dla dowolnych $x, y, z \in \mathbb{K}$ i dla pewnych elementów $0, 1 \in \mathbb{K}$ spełnione są warunki 1–9 to system $(\mathbb{K}, \oplus, \odot)$ nazywamy ciałem (abstrakcyjnym).

Ciała skończone

Niech p będzie liczbą pierwszą. Rozpatrzmy zbiór $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ możliwych reszt z dzielenia przez p. W tym zbiorze wprowadzimy działania dodawania i mnożenia modulo p.

Ciała skończone

Niech p będzie liczbą pierwszą. Rozpatrzmy zbiór $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ możliwych reszt z dzielenia przez p. W tym zbiorze wprowadzimy działania dodawania i mnożenia modulo p.

$$\begin{aligned} a + b &= \text{ reszta z dzielenia zwykłej sumy przez } p, \\ a \cdot b &= \text{ reszta z dzielenia zwykłego iloczynu przez } p. \end{aligned}$$

Ciała skończone

Niech p będzie liczbą pierwszą. Rozpatrzmy zbiór $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ możliwych reszt z dzielenia przez p. W tym zbiorze wprowadzimy działania dodawania i mnożenia modulo p.

$$\begin{aligned} a + b &= \text{reszta z dzielenia zwykłej sumy przez } p, \\ a \cdot b &= \text{reszta z dzielenia zwykłego iloczynu przez } p. \end{aligned}$$

Piszemy $a + b = c(\mathrm{mod}\ p)$, $ab = d(\mathrm{mod}\ p)$. Na przykład:

Ciała skończone

Niech p będzie liczbą pierwszą. Rozpatrzmy zbiór $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ możliwych reszt z dzielenia przez p. W tym zbiorze wprowadzimy działania dodawania i mnożenia modulo p.

$$a + b = \text{ reszta z dzielenia zwykłej sumy przez } p,$$
$$a \cdot b = \text{ reszta z dzielenia zwykłego iloczynu przez } p.$$

Piszemy $a + b = c (\bmod p)$, $ab = d (\bmod p)$. Na przykład:

$$2 + 2 = 1 (\bmod 3), \quad 3 \cdot 2 = 1 (\bmod 5).$$

Twierdzenie

Zbiór $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$, gdzie p jest liczbą pierwszą, z działaniami dodawania i mnożenia modulo p tworzy ciało.

Ciała skończone

Tabelki działań dla zbioru $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Dla $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$:

$$\begin{array}{c|ccc} + & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} \cdot & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}.$$

Działania modulo n można rozpatrywać dla dowolnej liczby naturalnej n, ale jeśli to jest liczba złożona, to $\mathbb{Z}_n$ nie jest ciałem. Popatrzmy na tabelki dla $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$:

$$
\begin{array}{c|cccc}
+ & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\
2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\
3 & 3 & 0 & 1 & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cccc}
\cdot & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\
3 & 0 & 3 & 2 & 1
\end{array}.
$$

Działania modulo n można rozpatrywać dla dowolnej liczby naturalnej n, ale jeśli to jest liczba złożona, to $\mathbb{Z}_n$ nie jest ciałem. Popatrzmy na tabelki dla $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$:

$$
\begin{array}{c|cccc}
+ & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\
2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\
3 & 3 & 0 & 1 & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cccc}
\cdot & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\
3 & 0 & 3 & 2 & 1
\end{array}.
$$

$\mathbb{Z}_4$ nie jest ciałem, bo nie istnieje 2^{-1}.

Działania modulo n można rozpatrywać dla dowolnej liczby naturalnej n, ale jeśli to jest liczba złożona, to $\mathbb{Z}_n$ nie jest ciałem. Popatrzmy na tabelki dla $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$:

$$\begin{array}{c|cccc} + & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} \cdot & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}.$$

$\mathbb{Z}_4$ nie jest ciałem, bo nie istnieje 2^{-1}.
Założenie, że p jest liczbą pierwszą jest konieczne (i dostateczne).

Pitagorejczycy przy próbie zmierzenia przekątnej kwadratu zauważyli, że nie jest on współmierny z bokiem.

Pitagorejczycy przy próbie zmierzenia przekątnej kwadratu zauważyli, że nie jest on współmierny z bokiem.
Oznacza to, że:
Równanie $x^2 = 2$ nie ma rozwiązania wymiernego.

Pitagorejczycy przy próbie zmierzenia przekątnej kwadratu zauważyli, że nie jest on współmierny z bokiem.
Oznacza to, że:
Równanie $x^2 = 2$ nie ma rozwiązania wymiernego.
Doprowadziło to do rozważania nowych liczb, które teraz nazywamy niewymiernymi.

Pitagorejczycy przy próbie zmierzenia przekątnej kwadratu zauważyli, że nie jest on współmierny z bokiem.
Oznacza to, że:
Równanie $x^2 = 2$ nie ma rozwiązania wymiernego.
Doprowadziło to do rozważania nowych liczb, które teraz nazywamy niewymiernymi.
Przy rozpatrywaniu równań kwadratowych spostrzegamy, że:
Równanie $x^2 = -1$ nie ma rozwiązania rzeczywistego.

Dodatni pierwiastek równania $x^2 = 2$ oznaczamy $\sqrt{2}$. Wiemy, że zbiór liczb postaci $a + b\sqrt{2}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$, jest ciałem.

Dodatni pierwiastek równania $x^2 = 2$ oznaczamy $\sqrt{2}$. Wiemy, że zbiór liczb postaci $a + b\sqrt{2}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$, jest ciałem.
Czy jest sens w analogii:
Pierwiastek równania $x^2 = -1$ oznaczamy i. Wtedy zbiór liczb(?) postaci $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, jest ciałem.

Dodatni pierwiastek równania $x^2 = 2$ oznaczamy $\sqrt{2}$. Wiemy, że zbiór liczb postaci $a + b\sqrt{2}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$, jest ciałem.
Czy jest sens w analogii:
Pierwiastek równania $x^2 = -1$ oznaczamy i. Wtedy zbiór liczb(?) postaci $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, jest ciałem.
Jest różnica: o ile $\sqrt{2}$ jest długością (więc liczbą) przekątnej kwadratu, to czym jest i?

Dodatni pierwiastek równania $x^2 = 2$ oznaczamy $\sqrt{2}$. Wiemy, że zbiór liczb postaci $a + b\sqrt{2}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$, jest ciałem.

Czy jest sens w analogii:

Pierwiastek równania $x^2 = -1$ oznaczamy i. Wtedy zbiór liczb(?) postaci $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, jest ciałem.

Jest różnica: o ile $\sqrt{2}$ jest długością (więc liczbą) przekątnej kwadratu, to czym jest i?

Nie potrafimy tego czegoś zinterpretować, niemniej skoro wykonywało się działania na liczbach postaci $a + b\sqrt{2}$, to można je wykonywać również na liczbach $a + bi$. Trzeba tylko pamiętać, że $i^2 = -1$.

Dodatni pierwiastek równania $x^2 = 2$ oznaczamy $\sqrt{2}$. Wiemy, że zbiór liczb postaci $a + b\sqrt{2}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$, jest ciałem.
Czy jest sens w analogii:
Pierwiastek równania $x^2 = -1$ oznaczamy i. Wtedy zbiór liczb(?) postaci $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, jest ciałem.
Jest różnica: o ile $\sqrt{2}$ jest długością (więc liczbą) przekątnej kwadratu, to czym jest i?
Nie potrafimy tego czegoś zinterpretować, niemniej skoro wykonywało się działania na liczbach postaci $a + b\sqrt{2}$, to można je wykonywać również na liczbach $a + bi$. Trzeba tylko pamiętać, że $i^2 = -1$.
Oznaczenie i wprowadził Euler.

Leonhard Euler (1707 – 1783)

Euler był matematykiem, ale także fizykiem i astronomem. Urodzony i wykształcony w Bazylei (Szwajcaria). Pracował w Petersburgu (1727-1741), Berlinie (1741-1766), Petersburgu (1766-1783).
W 1911 roku rozpoczęto wydawać jego *Dzieła zebrane*: Leonhard Euler Opera Omnia.
Do tej pory wydano 73 tomy, łącznie ponad 25000 stron.

Metoda Hamiltona konstrukcji liczb zespolonych.

Tworzymy iloczyn kartezjański $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Jego elementami są pary liczb rzeczywistych. W zbiorze par wprowadzamy działania

Metoda Hamiltona konstrukcji liczb zespolonych.

Tworzymy iloczyn kartezjański $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Jego elementami są pary liczb rzeczywistych. W zbiorze par wprowadzamy działania dodawania:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

Metoda Hamiltona konstrukcji liczb zespolonych.

Tworzymy iloczyn kartezjański $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Jego elementami są pary liczb rzeczywistych. W zbiorze par wprowadzamy działania dodawania:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

i mnożenia

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Metoda Hamiltona konstrukcji liczb zespolonych.

Tworzymy iloczyn kartezjański $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Jego elementami są pary liczb rzeczywistych. W zbiorze par wprowadzamy działania dodawania:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

i mnożenia

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Parę $z = (a, b)$ będziemy nazywać liczbą zespoloną, a cały zbiór $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ — zbiorem liczb zespolonych.
Będziemy go oznaczać literą $\mathbb{C}$.

$\mathbb{C}$ jest ciałem

Sprawdzenie własności działań jest dość łatwe. Np. para $(0,0)$ jest elementem zerowym dodawania, a para $(1,0)$ jest elementem jednostkowym mnożenia.

$\mathbb{C}$ jest ciałem

Sprawdzenie własności działań jest dość łatwe. Np. para $(0,0)$ jest elementem zerowym dodawania, a para $(1,0)$ jest elementem jednostkowym mnożenia.
Elementem przeciwnym do (a,b) jest taka para (x,y), że $(a+x,b+y)=(0,0)$; stąd $(x,y)=(-a,-b)$.

$\mathbb{C}$ jest ciałem

Czy istnieje element odwrotny do $(a, b) \neq (0, 0)$?

$\mathbb{C}$ jest ciałem

Czy istnieje element odwrotny do $(a, b) \neq (0, 0)$?
Załóżmy, że $z = (a, b)$ jest niezerową liczbą zespoloną, tj. $a^2 + b^2 > 0$, oraz że

$$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0).$$

$\mathbb{C}$ jest ciałem

Czy istnieje element odwrotny do $(a, b) \neq (0, 0)$?
Załóżmy, że $z = (a, b)$ jest niezerową liczbą zespoloną, tj. $a^2 + b^2 > 0$, oraz że

$$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0).$$

Wtedy, zgodnie z definicją mnożenia, musi być:

$$ax - by = 1, \qquad ay + bx = 0.$$

$\mathbb{C}$ jest ciałem

Czy istnieje element odwrotny do $(a, b) \neq (0, 0)$?
Załóżmy, że $z = (a, b)$ jest niezerową liczbą zespoloną, tj. $a^2 + b^2 > 0$, oraz że

$$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0).$$

Wtedy, zgodnie z definicją mnożenia, musi być:

$$ax - by = 1, \qquad ay + bx = 0.$$

Rozwiązaniem tego układu jest para liczb

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \qquad y = \frac{-b}{a^2 + b^2},$$

$\mathbb{C}$ jest ciałem

Czy istnieje element odwrotny do $(a, b) \neq (0, 0)$?
Załóżmy, że $z = (a, b)$ jest niezerową liczbą zespoloną, tj. $a^2 + b^2 > 0$, oraz że

$$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0).$$

Wtedy, zgodnie z definicją mnożenia, musi być:

$$ax - by = 1, \qquad ay + bx = 0.$$

Rozwiązaniem tego układu jest para liczb

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \qquad y = \frac{-b}{a^2 + b^2},$$

a więc liczba zespolona

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

jest odwrotnością liczby z.

$\mathbb{C}$ jest ciałem

Twierdzenie

Struktura $(\mathbb{C}; +, \cdot)$ *jest ciałem.*

Ciało $\mathbb{C}$ jako rozszerzenie ciała $\mathbb{R}$

W jakim sensie ciało $\mathbb{C}$ zawiera ciało $\mathbb{R}$?

Ciało $\mathbb{C}$ jako rozszerzenie ciała $\mathbb{R}$

W jakim sensie ciało $\mathbb{C}$ zawiera ciało $\mathbb{R}$?
Ponieważ zachodzą równości:

$$\begin{aligned} (a,0)+(b,0) &= (a+b,0) \\ (a,0)\cdot(b,0) &= (ab,0), \end{aligned}$$

więc parę $(a,0)$ można utożsamić z liczbą a.

Ciało $\mathbb{C}$ jako rozszerzenie ciała $\mathbb{R}$

W jakim sensie ciało $\mathbb{C}$ zawiera ciało $\mathbb{R}$?
Ponieważ zachodzą równości:

$$\begin{aligned}(a,0)+(b,0) &= (a+b,0)\\ (a,0)\cdot(b,0) &= (ab,0),\end{aligned}$$

więc parę $(a,0)$ można utożsamić z liczbą a.
Zbiór wszystkich takich par tworzy ciało liczb rzeczywistych zawarte w ciele liczb zespolonych.

Powrót do przeszłości

Jeśli wprowadzimy oznaczenie

$$i = (0, 1),$$

to liczba zespolona (a, b) daje się przedstawić za pomocą liczby i oraz liczb rzeczywistych a, b.

Powrót do przeszłości

Jeśli wprowadzimy oznaczenie

$$i = (0, 1),$$

to liczba zespolona (a, b) daje się przedstawić za pomocą liczby i oraz liczb rzeczywistych a, b.

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi,$$

gdzie zamiast $(a, 0)$, $(b, 0)$ napisaliśmy a, b.

Zauważmy, że

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1.$$

Zauważmy, że

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1.$$

Liczby zespolone będziemy zapisywać w postaci $a + bi$. Zapis ten pozwala przy działaniach arytmetycznych operować liczbami $a + bi$ jak wielomianami, przy czym należy zastępować i^2 przez -1.

William Rowan Hamilton
(1805 – 1865)

Hamilton w eseju *On Algebra as the Science of Pure Time* rozważał liczby zespolone jako pary liczb z określonymi operacjami. Potem przez wiele lat próbował przenieść te koncepcje na trójki liczb. Wreszcie w 1843 r. odkrył kwaterniony mające służyć opisowi mechaniki w przestrzeni trójwymiarowej.

Interpretacja geometryczna liczb zespolonych

W prostokątnym układzie współrzędnych liczbę zespoloną $z = a + bi$ można interpretować jako punkt o odciętej a i rzędnej b.

Interpretacja geometryczna liczb zespolonych

W prostokątnym układzie współrzędnych liczbę zespoloną $z = a + bi$ można interpretować jako punkt o odciętej a i rzędnej b. Punkty rzeczywiste, tj. takie punkty $z = a + bi$, dla których $b = 0$, wypełniają oś układu zwaną osią rzeczywistą, zaś punkty, dla których $a = 0$, wypełniają drugą oś, zwaną osią urojoną.

Liczby sprzężone

Niech $z = a + bi$. Przyjmiemy oznaczenie

$$a - bi = \overline{z}.$$

Liczbę $\overline{z}$ nazywamy sprzężoną z liczbą z.

Liczby sprzężone

Niech $z = a + bi$. Przyjmiemy oznaczenie

$$a - bi = \overline{z}.$$

Liczbę $\overline{z}$ nazywamy sprzężoną z liczbą z.
Np. $\overline{2 - 5i} = 2 + 5i$.

Liczby sprzężone

Niech $z = a + bi$. Przyjmiemy oznaczenie

$$a - bi = \bar{z}.$$

Liczbę $\bar{z}$ nazywamy sprzężoną z liczbą z.
Np. $\overline{2-5i} = 2+5i$.
Wzory:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \qquad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2,$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

Liczby sprzężone

Niech $z = a + bi$. Przyjmiemy oznaczenie

$$a - bi = \bar{z}.$$

Liczbę $\bar{z}$ nazywamy sprzężoną z liczbą z.
Np. $\overline{2 - 5i} = 2 + 5i$.
Wzory:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \qquad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2,$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

A także dla $z = a + bi$:

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

gdzie $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ nazywamy wartością bezwzględną liczby z.

Część rzeczywista i urojona

. Niech $z = a + bi$. Wprowadzamy oznaczenia

$$\operatorname{Re} z = a, \qquad \operatorname{Im} z = b.$$

Liczby $\operatorname{Re} z$ i $\operatorname{Im} z$ nazywamy odpowiednio częścią rzeczywistą i częścią urojoną liczby z.

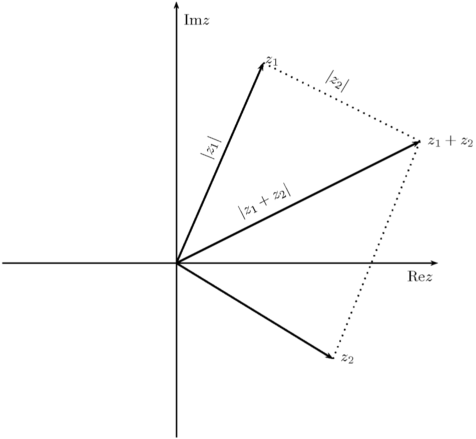
Część rzeczywista i urojona

. Niech $z = a + bi$. Wprowadzamy oznaczenia

$$\operatorname{Re} z = a, \qquad \operatorname{Im} z = b.$$

Liczby $\operatorname{Re} z$ i $\operatorname{Im} z$ nazywamy odpowiednio częścią rzeczywistą i częścią urojoną liczby z.
Np. $\operatorname{Re}(2 + 7i) = 2$, $\operatorname{Im}(2 + 7i) = 7$

Czasem wygodniej jest traktować liczbę $z = a + bi$ jako wektor zaczepiony w początku układu współrzędnych i końcu (a, b). Wtedy dodawanie liczb zespolonych jest (geometrycznie) dodawaniem wektorów.



Suma liczb zespolonych

Moduł liczby zespolonej

Jeśli z jest wektorem, to ma długość, kierunek i zwrot.

Moduł liczby zespolonej

Jeśli z jest wektorem, to ma długość, kierunek i zwrot.
Długość wynosi $\sqrt{a^2 + b^2}$. Nazywamy ją modułem bądź wartością bezwzględną liczby zespolonej z i oznaczamy $|z|$.

Moduł liczby zespolonej

Jeśli z jest wektorem, to ma długość, kierunek i zwrot.
Długość wynosi $\sqrt{a^2+b^2}$. Nazywamy ją modułem bądź wartością bezwzględną liczby zespolonej z i oznaczamy $|z|$.
Przykładowo:

$$|1+2i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}, \qquad |3-4i| = \sqrt{9+16} = 5.$$

Moduł liczby zespolonej

Jeśli z jest wektorem, to ma długość, kierunek i zwrot.
Długość wynosi $\sqrt{a^2 + b^2}$. Nazywamy ją modułem bądź wartością bezwzględną liczby zespolonej z i oznaczamy $|z|$.
Przykładowo:

$$|1 + 2i| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}, \qquad |3 - 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

Zauważmy, że równość $|z| = 1$ jest spełniona przez te punkty płaszczyzny, które leżą na okręgu o środku w początku układu i promieniu 1.

Moduł liczby zespolonej

Jeśli z jest wektorem, to ma długość, kierunek i zwrot.
Długość wynosi $\sqrt{a^2+b^2}$. Nazywamy ją modułem bądź wartością bezwzględną liczby zespolonej z i oznaczamy $|z|$.
Przykładowo:

$$|1+2i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}, \qquad |3-4i| = \sqrt{9+16} = 5.$$

Zauważmy, że równość $|z| = 1$ jest spełniona przez te punkty płaszczyzny, które leżą na okręgu o środku w początku układu i promieniu 1.
Nierówność $|z| < 1$ charakteryzuje punkty wewnątrz tego okręgu.

Moduł liczby zespolonej

Jeśli z jest wektorem, to ma długość, kierunek i zwrot.
Długość wynosi $\sqrt{a^2+b^2}$. Nazywamy ją modułem bądź wartością bezwzględną liczby zespolonej z i oznaczamy $|z|$.
Przykładowo:

$$|1+2i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}, \qquad |3-4i| = \sqrt{9+16} = 5.$$

Zauważmy, że równość $|z| = 1$ jest spełniona przez te punkty płaszczyzny, które leżą na okręgu o środku w początku układu i promieniu 1.
Nierówność $|z| < 1$ charakteryzuje punkty wewnątrz tego okręgu.
Liczba $|z - z_0|$ jest długością wektora $z - z_0$ lub odległością punktów z i z_0.

Argument liczby zespolonej

Kierunek i zwrot wektora $z = a + bi$ można określić, podając miarę φ kąta skierowanego, którego pierwszym ramieniem jest półoś rzeczywista dodatnia, a drugim ramieniem — wektor z. Tę miarę nazwiemy argumentem liczby z.

Argument liczby zespolonej

Kierunek i zwrot wektora $z = a + bi$ można określić, podając miarę φ kąta skierowanego, którego pierwszym ramieniem jest półoś rzeczywista dodatnia, a drugim ramieniem — wektor z. Tę miarę nazwiemy argumentem liczby z.

Argument jest wieloznaczny:

$$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi, \qquad \text{gdzie: } 0 \leqslant \varphi_0 < 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

φ_0 nazywamy argumentem głównym.

Argument liczby zespolonej

Kierunek i zwrot wektora $z = a + bi$ można określić, podając miarę φ kąta skierowanego, którego pierwszym ramieniem jest półoś rzeczywista dodatnia, a drugim ramieniem — wektor z. Tę miarę nazwiemy argumentem liczby z.
Argument jest wieloznaczny:

$$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi, \qquad \text{gdzie:}\, 0 \leqslant \varphi_0 < 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

φ_0 nazywamy argumentem głównym.
Oznaczamy:

$$\varphi_0 = \arg z, \qquad \varphi = \mathrm{Arg}\ z.$$

Argument liczby zespolonej

Kierunek i zwrot wektora $z = a + bi$ można określić, podając miarę φ kąta skierowanego, którego pierwszym ramieniem jest półoś rzeczywista dodatnia, a drugim ramieniem — wektor z. Tę miarę nazwiemy argumentem liczby z.
Argument jest wieloznaczny:

$$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi, \qquad \text{gdzie: } 0 \leqslant \varphi_0 < 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

φ_0 nazywamy argumentem głównym.
Oznaczamy:

$$\varphi_0 = \arg z, \qquad \varphi = \mathrm{Arg}\, z.$$

$\arg i = \frac{1}{2}\pi,$

Argument liczby zespolonej

Kierunek i zwrot wektora $z = a + bi$ można określić, podając miarę φ kąta skierowanego, którego pierwszym ramieniem jest półoś rzeczywista dodatnia, a drugim ramieniem — wektor z. Tę miarę nazwiemy argumentem liczby z.
Argument jest wieloznaczny:

$$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi, \qquad \text{gdzie: } 0 \leqslant \varphi_0 < 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

φ_0 nazywamy argumentem głównym.
Oznaczamy:

$$\varphi_0 = \arg z, \qquad \varphi = \mathrm{Arg}\ z.$$

$\arg i = \frac{1}{2}\pi$, $\mathrm{Arg}\ i = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$,

Argument liczby zespolonej

Kierunek i zwrot wektora $z = a + bi$ można określić, podając miarę φ kąta skierowanego, którego pierwszym ramieniem jest półoś rzeczywista dodatnia, a drugim ramieniem — wektor z. Tę miarę nazwiemy argumentem liczby z.
Argument jest wieloznaczny:

$$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi, \qquad \text{gdzie:}\, 0 \leqslant \varphi_0 < 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

φ_0 nazywamy argumentem głównym.
Oznaczamy:

$$\varphi_0 = \arg z, \qquad \varphi = \mathrm{Arg}\ z.$$

$\arg i = \frac{1}{2}\pi$, $\mathrm{Arg}\ i = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$, $\arg 1 = 0$,

Argument liczby zespolonej

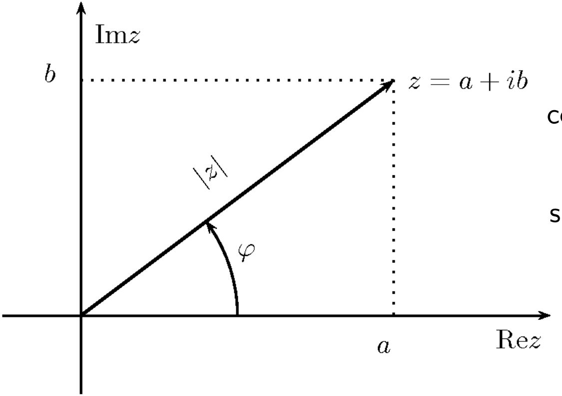
Kierunek i zwrot wektora $z = a + bi$ można określić, podając miarę φ kąta skierowanego, którego pierwszym ramieniem jest półoś rzeczywista dodatnia, a drugim ramieniem — wektor z. Tę miarę nazwiemy argumentem liczby z.
Argument jest wieloznaczny:

$$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi, \qquad \text{gdzie:}\, 0 \leqslant \varphi_0 < 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

φ_0 nazywamy argumentem głównym.
Oznaczamy:

$$\varphi_0 = \arg z, \qquad \varphi = \mathrm{Arg}\ z.$$

$\arg i = \frac{1}{2}\pi$, $\mathrm{Arg}\ i = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$, $\arg 1 = 0$, $\mathrm{Arg}\ 1 = 2k\pi$.



$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Moduł i argument liczby zespolonej

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

W takim razie

$$z = a + bi = |z|\left(\frac{a}{|z|} + i\frac{b}{|z|}\right) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

W takim razie

$$z = a + bi = |z|\left(\frac{a}{|z|} + i\frac{b}{|z|}\right) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Twierdzenie

Każda liczba zespolona daje się przedstawić w postaci

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

zwanej postacią trygonometryczną liczby z.

$$1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0),$$

$$1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0),$$

$$i = 1 \cdot (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}),$$

$$1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0),$$

$$i = 1 \cdot (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}),$$

$$1 + i = \sqrt{2} \cdot (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}).$$

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb zespolonych z_1 i z_2:

$$\text{Arg } z_1 z_2 = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2. \tag{1}$$

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb zespolonych z_1 *i* z_2*:*

$$\operatorname{Arg} z_1 z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2. \tag{1}$$

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb zespolonych z_1 *i* z_2*,* $(z_2 \neq 0)$*:*

$$\operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2. \tag{2}$$

Wzór de Moivre'a

Twierdzenie

Dla każdej liczby zespolonej z i każdego całkowitego n:

$$\operatorname{Arg} z^n = n \cdot \operatorname{Arg} z. \tag{3}$$

Wzór de Moivre'a

Twierdzenie

Dla każdej liczby zespolonej z i każdego całkowitego n:

$$\operatorname{Arg} z^n = n \cdot \operatorname{Arg} z. \tag{3}$$

Wzór de Moivre'a:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \tag{4}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{26} \quad =$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{26} = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{26} =$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{26} &= \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{26} = \\
&= \cos\frac{26\pi}{4} + i\sin\frac{26\pi}{4} =
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{26} &= \left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{26} = \\
&= \cos\frac{26\pi}{4}+i\sin\frac{26\pi}{4} = \\
&= \cos\left(6\pi+\frac{2\pi}{4}\right)+i\sin\left(6\pi+\frac{2\pi}{4}\right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{26} &= \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{26} = \\
&= \cos\frac{26\pi}{4} + i\sin\frac{26\pi}{4} = \\
&= \cos\left(6\pi + \frac{2\pi}{4}\right) + i\sin\left(6\pi + \frac{2\pi}{4}\right) = \\
&= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} =
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{26} &= \left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{26} = \\
&= \cos\frac{26\pi}{4}+i\sin\frac{26\pi}{4} = \\
&= \cos\left(6\pi+\frac{2\pi}{4}\right)+i\sin\left(6\pi+\frac{2\pi}{4}\right) = \\
&= \cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2} = i,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{26} &= \left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{26} = \\
&= \cos\frac{26\pi}{4}+i\sin\frac{26\pi}{4} = \\
&= \cos\left(6\pi+\frac{2\pi}{4}\right)+i\sin\left(6\pi+\frac{2\pi}{4}\right) = \\
&= \cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2} = i,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-3} &= \left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{-3} = \\
&= \cos(-2\pi)+i\sin(-2\pi) = \\
&= \cos 0+i\sin 0 = 1.
\end{aligned}$$

Dowód wzoru de Moivre'a

Dowód. Dla n naturalnego wzór (3) otrzymamy po wielokrotnym zastosowaniu wzoru (1).
Gdy $n = 0$, to prawdziwość wzoru wynika z równości $\mathrm{Arg}\ 1 = 2k\pi$.
Natomiast, gdy $n = -k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, to

$$\begin{aligned} \mathrm{Arg}\ z^n &= \mathrm{Arg}\ z^{-k} = \mathrm{Arg}\ \frac{1}{z^k} = \mathrm{Arg}\ 1 - \mathrm{Arg}\ z^k = \\ &= -k\,\mathrm{Arg}\ z = n\,\mathrm{Arg}\ z. \blacksquare \end{aligned}$$

Pierwiastkiem stopnia n z liczby z nazywamy taką liczbę w, że $w^n = z$.

Twierdzenie

Każda liczba zespolona $z = a + bi \neq 0$ ma dwa różne pierwiastki drugiego stopnia, określone wzorami:

$$\sqrt{z} = \begin{cases} \pm\sqrt{a} & dla \quad b = 0, a \geqslant 0, \\ \pm i\sqrt{-a} & dla \quad b = 0, a < 0, \\ \pm\left(\sqrt{\frac{a+|z|}{2}} + i \cdot \operatorname{sgn} b \sqrt{\frac{-a+|z|}{2}}\right) & dla \quad b \neq 0. \end{cases}$$

Przykłady:

$$\sqrt{3-4i} = \pm\left(\sqrt{\frac{3+5}{2}} + i(-1)\sqrt{\frac{-3+5}{2}}\right) = \pm(2-i),$$

$$\sqrt{3+4i} = \pm\left(\sqrt{\frac{3+5}{2}} + i\sqrt{\frac{-3+5}{2}}\right) = \pm(2+i).$$

Twierdzenie

Liczba $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ *ma dokładnie n różnych pierwiastków n-tego stopnia. Określone są one wzorem:*

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Obliczymy $\sqrt[3]{i}$:

Obliczymy $\sqrt[3]{i}$:

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2},$$

Obliczymy $\sqrt[3]{i}$:

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2},$$

zatem

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} =$$

Obliczymy $\sqrt[3]{i}$:

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2},$$

zatem

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

Obliczymy $\sqrt[3]{i}$:

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2},$$

zatem

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$w_1 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Obliczymy $\sqrt[3]{i}$:

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2},$$

zatem

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$w_1 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

Obliczymy $\sqrt[3]{i}$:

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2},$$

zatem

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$w_1 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$w_2 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) =$$

Obliczymy $\sqrt[3]{i}$:

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2},$$

zatem

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

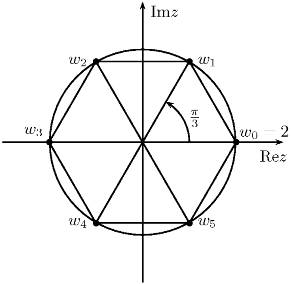
$$w_1 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$w_2 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) = -i.$$

Pierwiastki stopnia n z liczby z są wierzchołkami n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $\sqrt[n]{|z|}$. Na przykład pierwiastki stopnia 6 z 64, określone wzorem

$$w_k = 2\Big(\cos\frac{2\pi k}{6} + i\sin\frac{2\pi k}{6}\Big), \qquad k = 0, 1, \ldots, 5$$

są wierzchołkami sześciokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 2.



Równania algebraiczne

Równanie algebraiczne drugiego stopnia:

$$az^2 + bz + c = 0$$

o współczynnikach zespolonych rozwiązujemy w zwykły sposób, tzn. obliczamy wyróżnik $\Delta = b^2 - 4ac$ i stosujemy wzory:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Równania algebraiczne

Równanie algebraiczne drugiego stopnia:

$$az^2 + bz + c = 0$$

o współczynnikach zespolonych rozwiązujemy w zwykły sposób, tzn. obliczamy wyróżnik $\Delta = b^2 - 4ac$ i stosujemy wzory:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Zauważmy, że w tym przypadku (w przeciwieństwie do przypadku liczb rzeczywistych) zawsze istnieje $\sqrt{\Delta}$. W istocie są dwa pierwiastki różniące się znakiem. Do powyższych wzorów wystarczy podstawiać dowolny z nich (ten drugi da te same wartości $z_{1,2}$).

Równania algebraiczne

Przykłady.

1. Rozwiązać równanie

$$z^2 - 4z + 5 = 0.$$

Równania algebraiczne

Przykłady.

1. Rozwiązać równanie

$$z^2 - 4z + 5 = 0.$$

Obliczamy $\Delta = -4$, $\sqrt{\Delta} = \pm 2i$,

Równania algebraiczne

Przykłady.

1. Rozwiązać równanie

$$z^2 - 4z + 5 = 0.$$

Obliczamy $\Delta = -4$, $\sqrt{\Delta} = \pm 2i$,

$$z_1 = \frac{4+2i}{2} = 2 + i, \quad z_2 = \frac{4-2i}{2} = 2 - i.$$

Równania algebraiczne

Przykłady.

1. Rozwiązać równanie

$$z^2 - 4z + 5 = 0.$$

Obliczamy $\Delta = -4$, $\sqrt{\Delta} = \pm 2i$,

$$z_1 = \frac{4+2i}{2} = 2 + i, \quad z_2 = \frac{4-2i}{2} = 2 - i.$$

To równanie miało współczynniki rzeczywiste i jego pierwiastki są liczbami sprzężonymi.

Równania algebraiczne

2. Rozwiązać równanie

$$z^2 + (-1+i)z + (2+i) = 0.$$

Równania algebraiczne

2. Rozwiązać równanie

$$z^2 + (-1+i)z + (2+i) = 0.$$

Obliczamy $\Delta = -8 - 6i$,

Równania algebraiczne

2. Rozwiązać równanie

$$z^2 + (-1 + i)z + (2 + i) = 0.$$

Obliczamy $\Delta = -8 - 6i$, $\sqrt{\Delta} = \pm(1 - 3i)$,

Równania algebraiczne

2. Rozwiązać równanie

$$z^2 + (-1 + i)z + (2 + i) = 0.$$

Obliczamy $\Delta = -8 - 6i$, $\sqrt{\Delta} = \pm(1 - 3i)$, więc

$$z_1 = \frac{1 - i + 1 - 3i}{2} = 1 - 2i, \qquad z_2 = \frac{1 - i - 1 + 3i}{2} = i.$$

Równania algebraiczne

2. Rozwiązać równanie

$$z^2 + (-1+i)z + (2+i) = 0.$$

Obliczamy $\Delta = -8 - 6i$, $\sqrt{\Delta} = \pm(1-3i)$, więc

$$z_1 = \frac{1 - i + 1 - 3i}{2} = 1 - 2i, \qquad z_2 = \frac{1 - i - 1 + 3i}{2} = i.$$

W ogólnym przypadku pierwiastki nie są sprzężone.

Równania algebraiczne

2. Rozwiązać równanie

$$z^2 + (-1+i)z + (2+i) = 0.$$

Obliczamy $\Delta = -8 - 6i$, $\sqrt{\Delta} = \pm(1-3i)$, więc

$$z_1 = \frac{1 - i + 1 - 3i}{2} = 1 - 2i, \qquad z_2 = \frac{1 - i - 1 + 3i}{2} = i.$$

W ogólnym przypadku pierwiastki nie są sprzężone.
Tak więc równanie algebraiczne drugiego stopnia ma dokładnie dwa pierwiastki, jeśli przyjmiemy, że pierwiastek podwójny (występujący, gdy $\Delta = 0$) liczymy dwa razy.

Równania algebraiczne

Rozważmy teraz równanie postaci:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0,$$

gdzie $a_k \in \mathbb{C}$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$ i $a_n \neq 0$. Takie równanie nazywamy równaniem algebraicznym stopnia n.

Równania algebraiczne

Rozważmy teraz równanie postaci:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0,$$

gdzie $a_k \in \mathbb{C}$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$ i $a_n \neq 0$. Takie równanie nazywamy równaniem algebraicznym stopnia n.

Twierdzenie (zasadnicze twierdzenie algebry)

Algebraiczne równanie stopnia n o współczynnikach zespolonych ma w ciele liczb zespolonych dokładnie n pierwiastków (każdy pierwiastek liczymy tyle razy, ile wynosi jego krotność).

Równania algebraiczne

Rozważmy teraz równanie postaci:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0,$$

gdzie $a_k \in \mathbb{C}$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$ i $a_n \neq 0$. Takie równanie nazywamy równaniem algebraicznym stopnia n.

Twierdzenie (zasadnicze twierdzenie algebry)

Algebraiczne równanie stopnia n o współczynnikach zespolonych ma w ciele liczb zespolonych dokładnie n pierwiastków (każdy pierwiastek liczymy tyle razy, ile wynosi jego krotność).

Dla przykładu rozwiązaniami równania

$$z^n - 1 = 0$$

Równania algebraiczne

Rozważmy teraz równanie postaci:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0,$$

gdzie $a_k \in \mathbb{C}$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$ i $a_n \neq 0$. Takie równanie nazywamy równaniem algebraicznym stopnia n.

Twierdzenie (zasadnicze twierdzenie algebry)

Algebraiczne równanie stopnia n o współczynnikach zespolonych ma w ciele liczb zespolonych dokładnie n pierwiastków (każdy pierwiastek liczymy tyle razy, ile wynosi jego krotność).

Dla przykładu rozwiązaniami równania

$$z^n - 1 = 0$$

są pierwiastki stopnia n z liczby 1.

Carl Friedrich Gauss
(1777 - 1855)

Gauss był niezwykle wszechstronny. Jego dokonania obejmują prawie wszystkie działy matematyki, ale także fizyki, astronomii, czy geodezji. Zasadnicze twierdzenie algebry wykazał w 1799 w rozprawie doktorskiej. W książce *Disquisitiones arithmeticae* (1801) wprowadził kongruencje. Znane są m. in. *prawo Gaussa, krzywa Gaussa, krzywizna Gaussa, metoda Gaussa, twierdzenie Gaussa*, ...