**1.** W pewnym banku obowiązuje miesięczna kapitalizacja złożona z dołu przy rocznej stopie procentowej 8,65%. Jak należy zmienić roczną stopę procentową, aby po przejściu na kapitalizację:
a) prostą,
b) złożoną z góry kwartalną,
c) ciągłą
dotrzymać równoważności warunków oprocentowania dla 5 lat? Czy nowe warunki oprocentowania będą równoważne również dla 10 lat?
**2.** Po 2 latach i 3 miesiącach kwartalnej kapitalizacji złożonej z dołu kwota 50 j.p. wzrosła dwukrotnie. Jaką wartość osiągnie ta kwota po kolejnym roku?
**3.** Do banku wpłacono 2000 j.p. Przez pierwsze 3 lata obowiązywała roczna kapitalizacja złożona z dołu z roczną stopą procentową 12% a przez następne 2 lata kwartalna kapitalizacja złożona z dołu z roczną stopą procentową 9%. Wyznaczyć wartość tego kapitału po 5 latach.
**4.** Przez ile lat należy wpłacać na początku każdego roku kwotę 200 zł, aby przyszła wartość wkładów oszczędnościowych była równa dokładnie 1000 zł. Roczna stopa procentowa wynosi 8% i kapitalizacja jest złożona roczna. Przedstawić różne warianty rozwiązania problemu niepełnej ilości lat.
**5.** W banku, w którym obowiazuje roczna kapitalizacja złożona z dołu kapitał 5000 utworzył po 1. roku wartość 6000. Ile zyskałby właściciel kapitału w ciągu 2. lat, gdyby przy nie zmienionej rocznej stopie procentowej wprowadzono kapitalizację kwartalną?
**6.** Wykazać, że ciąg $r^{(m)}$ jest malejący.

**1.** Wykaż, że
$$r^{(m)} - d^{(m)} = \frac{r^{(m)}d^{(m)}}{m}.$$
**2.** Wykaż, że
$$d < d^{(2)} < d^{(3)} < \ldots < \delta < \ldots < r^{(3)} < r^{(2)} < r$$
oraz
$$r^{(m)} - d^{(n)} \leqslant \frac{r^2}{\min(m, n)}.$$
**3.** Weksel o wartości nominalnej 1000 zł i terminie płatności za 8 miesięcy zamienić na weksel równoważny z terminem płatności za 10 miesięcy. Bieżąca roczna stopa dyskontowa wynosi 15%.
**4.** Wyznaczyć stopę dyskontową, jeżeli dyskonto handlowe weksla o wartości nominalnej 1000 zł zdyskontowanego na 30 dni przed terminem wykupu wynosi 20 zł.
**5.** Pan X zamierza złożyć weksel do dyskonta. Weksel ma 3-miesięczny termin płatności i wartość nominalną 1200 zł. Stopa dyskontowa wynosi 15%. Bank może również udzielić 3-miesięcznej pożyczki oprocentowanej prz stopie $r$, przy czym oprocentowanie jest proste płatne z dołu. Dla jakiej stopy $r$ zaciągnięcie pożyczki równej aktualnej wartości handlowej weksla jest równoważne złożeniu weksla do dyskonta? Dla jakich stóp $r$ złożenie weksla do dyskonta będzie dla pana X korzystniejsze niż zaciągnięcie pożyczki?
**6.** Zaciągnięto dług 1800 jp. Co kwartał spłacano raty łączne w wysokości odpowiednio: $A_1 = 500$ jp, $A_2 = 400$ jp, $A_3 = 600$ jp. Ustalić wartość długu bieżącego po spłaceniu trzeciej raty, jeżeli zastosowano dyskonto matematyczne proste przy aktualizacji na koniec roku, a roczna stopa procentowa wynosi 9%.

**1.** Dług o wartości 5000 jp spłacany jest w pięciu ratach co dwa miesiące przy rocznej stopie procentowej 18% z roczną kapitalizacją odsetek. Do momentu płatności ostatniej raty zostały wpłacone następujące raty: 100 jp, 100 jp, 2000jp, 2000 jp. Przyjmując, że w ciągu roku odsetki nie kapitalizują się wyznaczyć ostatnią ratę korzystając z zasady ogólnej z aktualizacją: i) na moment zaciągania długu, ii) na koniec piątego miesiąca, iii) na moment umarzania długu. Rozważyć oba rodzaje dyskonta.

**2.** Wykazać, że

$$(1+r)a_{\overline{n|}} = a_{\overline{n-1|}} + 1, n = 2, 3, \ldots$$

$$(1+r)s_{\overline{n|}} = s_{\overline{n+1|}} - 1, n = 1, 2, \ldots$$

$$(1+r)^{-h}a_{\overline{n|}} = a_{\overline{h+n|}} - a_{\overline{h|}},\ n = 1, 2, \ldots,\ h = 1, 2, \ldots$$

**3.** Dług o wartości 6000 jp spłacany jest w kwartalnych ratach o wysokości 250 jp przy kwartalnej stopie procentowej 4% z kwartalną kapitalizacją odsetek. Określić w ciągu ilu kwartałów zostanie spłacony dług, jeżeli przewiduje się półroczną karencję
a) dla spłat kapitału, b) dla spłat kapitału i odsetek.
W każdym przypadku określić ostatnią ratę proponując różne możliwe rozwiązania.

**4.** Kredyt w wysokości 1000000 jp zaciągnięty został na 20 lat. W umowie kredytowej przewidziano spłatę kredytu w miesięcznych ratach oraz możliwość zmiany stopy procentowej co pięć lat. Przez pierwszych 10 lat roczna stopa procentowa wynosiła 20% z półroczną kapitalizacją odsetek, przez kolejne 5 lat 24%, a przez ostatnie pięć lat 18%. Określić dług bieżący po upływie 18 lat w sytuacji, gdy a) ustalono stałe miesięczne raty raz na cały okres spłaty długu, b) stałe miesięczne raty ustalano każdorazowo po zmianie warunków oprocentowania. W którym przypadku ulegnie zmianie okres spłaty kredytu?

**5.** Kredyt hipoteczny w wysokości 600 000 jp ma być spłacony w ciągu 40 lat w ratach miesięcznych przy rocznej stopie procentowej 12% z kwartalną kapitalizacją odsetek. Wysokość stopy procentowej gwarantowana jest w okresach pięcioletnich.
a) Umowa kredytowa określa, że konwersja długu może być dokonana z naliczeniem karnej opłaty równej rocznej sumie rat. Po ośmiu latach spłaty kredytu na rynku finansowym roczna stopa procentowa obniżyła się do poziomu 10% z roczną kapitalizacją odsetek. Sprawdzić zasadność wniosku o konwersję długu. Przyjąć w analizie stopy procentowe równoważne.
b) Umowa kredytowa określa, że konwersja długu może być dokonana z naliczeniem karnej opłaty równej sumie traconej na skutek obniżenia stopy procentowej przez $k$ okresów pozostałych do najwcześniejszego momentu renegocjacji stopy procentowej. Po dziesięciu latach i trzech miesiącach spłaty kredytu na rynku finansowym roczna stopa procentowa obniżyła się do poziomu 10% z kwartalną kapitalizacją odsetek. Sprawdzić zasadność wniosku o konwersję długu. Przyjąć w analizie stopy procentowe równoważne.

**6.** Kredyt 50 jp należało spłacić w 5. równych płatnościach rocznych przy rocznej stopie procentowej 20%. Jednakże po spłaceniu 2. rat nastąpiła zmiana stopy procentowej i pozostałe 3 płatności wyznaczano przy rocznej stopie procentowej 18%. Ułożyć plan spłaty długu w postaci tabeli, jeżeli kapitalizacja była złożona roczna.

**7.** Bank stosuje kapitalizację złożoną roczną przy rocznej stopie procentowej 15%. Plan spłaty długu przewidywał następujące płatności roczne: $A_1 = 30$ jp, $A_2 = 50$ jp, $A_3 = 60$ jp, $A_4 = 30$ jp. Po spłaceniu pierwszej raty, dzięki niespodziewanej wygranej, dłużnik postanowił spłacić resztę długu już w drugiej racie. Jaka będzie wysokość drugiej spłaty? Jaka była wysokość zaciągniętego długu?

**8.** Załóżmy, że dług $K$ spłacany jest w $n$ równych ratach $A$ przy stopie procentowej $r$. Po zapłaceniu $h$ rat stopa procentowa obniża się do wartości $\tilde{r}$. Opłata karna za konwersję wynosi $\alpha A$. Wykazać, że progiem opłacalności konwersji jest $\alpha = a_{\overline{n-h|}\tilde{r}} - a_{\overline{n-h|}r}$.

**9.** Kredytobiorca spłaca 4 kredyty zaciągnięte w tym samym banku i ma jeszcze do spłacenia:
– 2 miesięczne płatności po 1000 zł, przy rocznej stopie 18%;
– 6 miesięcznych płatności po 500 zł, przy rocznej stopie 15%;
– 10 miesięcznych płatności po 200 zł, przy rocznej stopie 18%;
– 12 miesięcznych płatności po 100 zł, przy rocznej stopie 18%.
Zamienić te 4 kredyty na 1 skonsolidowany, spłacany w ratach równych przez 10 miesięcy, przy rocznej stopie 15%.

**1.** Inwestor kupuje obligację za 97 zł, po 90 dniach otrzymuje odsetki w wysokości 3 zł oraz sprzedaje ją za 100 zł. Oblicz rentowność tej inwestycji.
**2.** Wyznaczyć cenę trzyletniej obligacji o wartości nominalnej 100 zł, jeżeli odsetki wypłacane są kwartalnie według rocznej stopy proc. 6%. Roczna stopa dyskontowa wynosi 8%.
**3.** Certyfikat o wartości nominalnej 5000 zł po 20 dniach został sprzedany za 5100 zł. Jaka była rentowność tej inwestycji?
**4.** Wartość nominalna 60-dniowego certyfikatu depozytowego wynosi 10000 zł, a jego oprocentowanie 6% rocznie. Na 20 dni przed terminem wykupu został on sprzedany na rynku wtórnym, i sprzedający osiągnął rentowność 7%. Jaka była cena sprzedaży? Jaką rentowność uzyska kupujący, jeśli przedstawi go do wykupu za 20 dni?

**1.** W tablicach trwania życia zawarte są liczby $l_x$ $(0 \leqslant x < \omega)$ oznaczające liczbę tych spośród początkowych $l_0$ osób (np. $l_0 = 100000$), które dożyły wieku $x$. Stąd wylicza się prawdopodobieństwo dożycia wieku $x$: $s(x) = \frac{l_x}{l_0}$. Wtedy

$$_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_{x+t}}{l_x}.$$

a) Wykazać, że $l_y\mu_y = -\frac{d}{dy}l_y$ dla dowolnego $y$.
b) Wykazać, że jeśli $l_x\mu_x = c$ ($c$ - stała) dla $0 \leqslant x < \omega$, to $T(x)$ ma rozkład jednostajny w $(0, \omega - x)$.
c) Przy założeniu b) obliczyć $\mathrm{E}(T)$ i $\mathrm{Var}(T)$ dla $x = 88$, $\omega = 100$.
**2.** a) Wyprowadzić wzór rekurencyjny:
$e_x = p_x(1 + e_{x+1})$.
b) Mając daną tablicę wartości $e_x$:

| Wiek $x$ | $e_x$ |
|---|---|
| 75 | 10,5 |
| 76 | 10,0 |
| 77 | 9,5 |

i korzystając z a) oblicz prawdopodobieństwo, że 75-latek dożyje 77. lat.
**3.** Wiedząc, że $l_x = (121 - x)^{1/2}$ dla $0 \leqslant x \leqslant 121$ oblicz prawdopodobieństwo że 21-latek umrze po 40, ale przed osiągnięciem wieku 57.
**4.** Intensywność wymierania określona jest prawem de Moivre'a oraz $\mathrm{E}[T(16)] = 36$. Oblicz $\mathrm{Var}[T(16)]$.
**5.** Mając dane $A_{x:\overline{n|}} = u$, $A^1_{x:\overline{n|}} = y$, $A_{x+n} = z$ oblicz $A_x$ w zależności od $u$, $y$ i $z$.
**6.** Załóżmy, że intensywności wymierania $\mu$ i oprocentowania $\delta$ są stałe. Wyznaczyć $\mathrm{Var}(v^T)$ w zależności od $\mu$ i $\delta$.
**7.** Mając daną funkcję przeżycia (tzn. prawdopodobieństwo, że noworodek dożyje wieku $x$): $s(x) \stackrel{\text{def}}{=} {}_xp_0 = e^{-0,02x}$ dla $x \geqslant 0$ oraz intensywność oprocentowania $\delta = 0,04$ obliczyć medianę zmiennej losowej $Z = v^T$ będącej teraźniejszą wartością polisy na życie wystawionej $y$-latkowi.
**8.** Mając daną funkcję przeżycia $s(x) = {}_xp_0 = 1 - \frac{x}{100}$ dla $0 \leqslant x \leqslant 100$, intensywność oprocentowania $\delta = 0,1$, i wiedząc, że wypłata świadczenia następuje w momencie śmierci obliczyć jednorazową składkę netto dla 10-letniego ubezpieczenia na życie i dożycie wartości 50 000 wystawionego 50-latkowi.

Zadania trudniejsze
( z egzaminów dla aktuariuszy)
**1.** Dane są renty ciągłe, w których wysokość płatności w chwili $t$ wynosi $t$ zaś natężenie oprocentowania zależne jest od długości okresu wypłacania renty i wynosi $\frac{1}{n}$. Wyznacz ile razy obecna wartość renty wypłacanej przez okres 3 lat jest większa od obecnej wartości wypłacanej przez okres 2 lat.

**2.** Oblicz wartość końcową miesięcznej renty o wysokości kwartałami stałej po upływie 15 miesięcy wiedząc, że wysokość rat wzrośnie w kolejnych kwartałach o 4%. Na początku renta wynosi 150 zł. Miesięczna stopa procentowa wynosi 2%.
**3.** Dane są dwie renty wieczyste A i B, gdzie 1) renta A - w wysokości 1 płatna na koniec każdego roku, 2) renta B - w wysokości 1 płatna na koniec co drugiego roku. Różnica pomiędzy obecną wartością renty A, wyznaczoną przy stopie technicznej $i$, a obecną wartością renty B wyznaczoną również przy stopie technicznej $i$, wynosi $\sqrt{2}$. Wyznacz stopę techniczną $i$.
**4.** Obligacja o wartości nominalnej równej wartości wykupu 1 500 zł ze stopą kuponową C będzie wykupiona po $n$ latach. W przypadku gdy zwiększymy stopę kuponową o 1%, cena zakupu wzrośnie o 75 zł. Cena zakupu obligacji została wyliczona przy stopie zwrotu 6% o półrocznej kapitalizacji odsetek. Inna obligacja o wartości nominalnej równej wartości wykupu 1500 zł będzie wykupiona po $2n$ latach. Oblicz jej cenę zakupu przy stopie zwrotu 6% o półrocznej kapitalizacji odsetek, jeżeli jej stopa kuponowa wynosi 7%. Wszystkie obligacje wypłacają półroczne kupony.
**5.** Na okres 10 lat została zaciągnięta pożyczka, którą pożyczkobiorca spłacił równymi ratami płatnymi na koniec każdego roku. Ile wynosi całkowita kwota spłaconych odsetek jeżeli:
- kapitał spłacony w pierwszych trzech ratach wyniósł 1253 zł
- kapitał spłacony w ostatnich trzech ratach wyniósł 1763 zł.
**6.** 10-letnia obligacja o wartości 1000 płaci kupony półroczne każdy o wysokości 50. Środki otrzymane z kuponów są reinwestowane przy stopie $i^{(2)} = 4\%$ . Wyznacz kwotę za którą inwestor zakupił obligacje, jeżeli efektywna stopa zwrotu z inwestycji w ciągu 10-letniego okresu inwestowania wyniesie $i = 10\%$.
**7.** Pożyczka jest spłacana za pomocą 10 malejących spłat na końcu każdego okresu odpowiednio w wysokości 20, 19, 18, 17, 16,...11 dokonywanych na końcu każdego roku. Znajdź wysokość oprocentowania zapłaconego w piątej spłacie.