Zadanie 1.

Zakładamy, że:
i) Funkcja przeżycia $s(x) = 1 - \frac{x}{100}$ dla $0 \leqslant x \leqslant 100$;
ii) Intensywność oprocentowania $\delta = 0,1$.
Obliczyć $50\ 000\bar{A}_{30}$.

Wskazówka: Funkcja przeżycia jest prawdopodobieństwem ${}_xp_0$; oblicza się ją jako iloraz $\frac{l_x}{l_0}$, gdzie l_x jest liczbą żyjących w roku x. Natomiast $\bar{A}_{30}$ jest wartością oczekiwaną zmiennej υ^T, a więc pewną całką; aby ją obliczyć trzeba najpierw znać ${}_tp_x$ — jak to wyrazić za pomocą funkcji przeżycia?

$\bar{A}_x = \int_0^\infty v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_tp_x (-\frac{d}{dt} \ln {}_tp_x) dt =$
$= \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_tp_x (-\frac{\frac{d}{dt}({}_tp_x)}{{}_tp_x}) dt = -\int_0^\infty e^{-\delta t} \frac{d}{dt}({}_tp_x) dt.$
Ponadto

$$ {}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{1-(x+t)/1000}{1-x/100} = \frac{100-x-t}{100-x} = 1 - \frac{t}{100-x} $$

zatem $\frac{d}{dt} {}_tp_x = -\frac{1}{100-x}$.
Podstawiamy:

$$ \bar{A}_{30} = \int_0^\infty e^{-\delta t} \frac{1}{100-30} dt = \frac{1}{70} \int_0^{70} e^{-0,1t} dt = -\frac{1}{7}(e^{-7} - 1). $$

Ostatecznie $50000\bar{A}_{30} = \frac{50000}{7}(1 - \frac{1}{e^7}) = 7136.$

Zadanie 2.

Z_1 jest zmienną losową oznaczającą teraźniejszą wartość n-letniego ciągłego ubezpieczenia na życie i dożycie. Z_2 jest zmienną losową oznaczającą teraźniejszą wartość n-letniego ciągłego ubezpieczenia na życie. Oblicz $\mathrm{Var}(Z_1)$ wiedząc, że:

i) $\mathrm{Var}(Z_2)=0{,}01$;
ii) $v^n = 0,3$;
iii) ${}_n p_x = 0,8$;
iv) $\mathrm{E}(Z_2)=0{,}04$.

Wskazówka:
Wprowadzić Z_3 jako teraźniejszą wartość ciągłego ubezpieczenia na dożycie. Wtedy $Z_1 = Z_2 + Z_3$.

Mamy: $\mathrm{Var}(Z_1) = \mathrm{Var}(Z_2) + 2\mathrm{Cov}(Z_2, Z_3) + \mathrm{Var}(Z_3)$. Ponadto $\mathrm{Cov}(Z_2, Z_3) = -\mathrm{E}(Z_2)\mathrm{E}(Z_3)$, bo $Z_2 Z_3 = 0$. Aby wyliczyć $\mathrm{Var}(Z_1)$ należy znać wariancje i wartości oczekiwane zmiennych Z_2 i Z_3. Dla Z_2 są one dane. Dalej,

$$\mathrm{E}(Z_3) = \upsilon^n {}_n p_x = 0,3 \cdot 0,8 = 0,24,$$

$$\mathrm{Var}(Z_3) = \upsilon^{2n} {}_n p_x {}_n q_x = 0,3^2 0,8 \cdot 0,2.$$

Ostatecznie $\mathrm{Var}(Z_1) = 0,0052$.

Zadanie 3.

50-latek chce nabyć ciągłe (bezterminowe) ubezpieczenie na życie. Wiedząc, że:
i) śmiertelność podlega prawu de Moivre'a z $\omega = 100$;
ii) $r = 0,01$ i oprocentowanie jest proste;
iii) funkcja wypłaty wynosi: $b_t = 1000 - 0,1t^2$;
obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej Z będącej wartością teraźniejszą tego ubezpieczenia.

Wskazówka:
$Z = \upsilon_T b_T$. Ponieważ oprocentowanie jest proste, więc $\upsilon_t = \frac{1}{1+0,01t}$. Skoro śmiertelność podlega prawu de Moivre'a, to zmienna T ma rozkład jednostajny.

$v^t = \frac{1}{1+0{,}01t} = \frac{100}{100+t}$. Zatem
$v^t b_t = \frac{100}{100+t}(1000 - \frac{t^2}{10}) = 10(100 - t)$. Stąd $Z = 10(100 - T)$ oraz $\mathrm{E}(Z) = 10(100 - \mathrm{E}(T))$. Ponieważ T ma rozkład jednostajny w przedziale $(0, 50)$, więc $\mathrm{E}(T) = 25$, $\mathrm{E}(Z) = 10 \cdot 75 = 750$.

Zadanie 4.

O 3-letniej rencie płatnej z góry wystawionej x-latkowi wiemy, że:

t	Płatność	p_{x+t}
0	2	0,80
1	3	0,75
2	4	0,50

oraz, że $v = 0,9$. Obliczyć wariancję wartości teraźniejszej tych płatności.

Wskazówka:

Obliczyć wartości zmiennych losowych Y i Y^2 dla $K = 0$, $K = 1$, $K \geqslant 2$.

Ponieważ $\Pr(K=0)=q_x=0,2$, $\Pr(K=1)=p_x\cdot q_{x+1}=0,2$, $\Pr(K\geqslant 2)=p_x\cdot p_{x+1}=0,6$, więc ($PV$ oznacza wartość teraźniejszą):

Zdarz.	Prawd.	PV	$PV\cdot$Prawd.	$PV^2\cdot$Prawd.
$K=0$	0,2	2,00	0,400	0,800
$K=1$	0,2	4,70	0,940	4,418
$K\geqslant 2$	0,6	7,94	4,764	37,826

Obliczamy: $\mathrm{E}(Y)=6,104$, $\mathrm{E}(Y^2)=43,044$. Zatem $\mathrm{Var}(Y)=5,785$.

Zadanie 5.

O 3-letniej rencie płatnej z góry wystawionej x-latkowi wiemy, że:

t	Płatność	p_{x+t}
0	2	0,80
1	3	0,75
2	4	0,50

oraz $r = 0,1$.

Obliczyć prawdopodobieństwo, że wartość teraźniejsza jest większa od 4.

Wskazówka:

Zmienna losowa Y ma tylko trzy wartości; obliczyć je. Jeżeli $Y > 4$, to jakie jest K?

Wartości wynoszą: 2, $2+3v=4,7273$, $2+3v+4v^2=8,0331$.
Stąd

$$\Pr(Y>4)=\Pr(K>0)=1-0,2=0,8.$$

Zadanie 6.

Mając dane wartości rent płatnych z góry, obliczone dla $r = 0,03$:

x	$\ddot{a}_x$
72	8,06
73	7,73
74	7,43
75	7,15

obliczyć prawdopodobieństwo p_{73}.

Wskazówka:
Zastosować wzór rekurencyjny $\ddot{a}_x = 1 + \upsilon p_x \ddot{a}_{x+1}$.

Podstawiając we wzorze rekurencyjnym $x = 73$ mamy $\ddot{a}_{73} = 1 + v p_{73} \ddot{a}_{74}$, czyli $7,73 = 1 + (1,03)^{-1} p_{73} \cdot 7,43$, więc $p_{73} = 0,93$.

Zadanie 7.

Dla ciągłego ubezpieczenia na całe życie $\mathsf{E}(v^{2T})$=0,25. Załóżmy, że natężenie śmiertelności i stopa procentowa są stałe. Obliczyć $\mathsf{E}(v^{T})$.

Rozwiązanie:
$\mathsf{E}(v^{2T}) = \int_0^\infty v^{2t} e^{-\mu t}\,\mathrm{d}\,t = \int_0^\infty e^{-(2\delta+\mu)t}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\mu}{2\delta+\mu} = \frac{1}{2\frac{\delta}{\mu}+1}$. Stąd $\frac{\delta}{\mu} = \frac{3}{2}$. Zatem

$$\mathrm{E}(v^{T}) = \frac{\mu}{\delta+\mu} = \frac{1}{\frac{\delta}{\mu}+1} = \frac{2}{5}.$$

Zadanie 8.

Bezterminowa polisa na życie x-latka daje wypłatę 10 000 zł na koniec roku śmierci. Kupując tę polisę x-latek ma do wyboru dwa ekwiwalentne sposoby płacenia dożywotniej składki: (i) na początku każdego roku w wysokości 500 zł, (ii) na początku każdego miesiąca w wysokości π zł. Wyznacz wysokość π przy założeniu jednostajnego rozkładu zgonów w ciągu roku oraz stopie procentowej $i = 4\%$.

Z warunku $500\ddot{a}_x = 10000A_x$, czyli $\ddot{a}_x = 20(1 - d\ddot{a}_x)$ mamy $\ddot{a}_x = 260/23$. Dalej z równości (i) i (ii) mamy

$$\pi \ddot{a}_x^{(12)} = 500\ddot{a}_x$$

ale

$$\ddot{a}_x^{(12)} = \frac{id}{i^{(12)}d^{(12)}}\ddot{a}_x - \frac{i - i^{(12)}}{i^{(12)}d^{(12)}}$$

gdzie $i^{(12)} = 12(1,04^{1/12} - 1)$, $d^{(12)} = 12(1 - \frac{100}{104}^{1/12})$.