1. Funkcje zespolone zmiennej rzeczywistej

Jeżeli każdej liczbie rzeczywistej t, $t \in [\alpha, \beta]$ przyporządkujemy liczbę zespoloną

$$z = z(t) = x(t) + iy(t)$$

to otrzymujemy funkcję zespoloną zmiennej rzeczywistej. Ciągłość takiej funkcji, pochodną i całkę określamy w naturalny sposób, przyjmując, że obie funkcje $x(t)$, $y(t)$ są ciągłe, różniczkowalne bądź całkowalne. Ponieważ równania:

$$x = x(t),\ y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

stanowią parametryczny opis krzywej na płaszczyźnie, więc równanie $z = x(t) + iy(t)$ jest też opisem krzywej.
Przykłady 1. Jaką krzywą przedstawia równanie:
a) $z = 1 - i + (1 + 2i)t$, $-\infty < t < \infty$
b) $z = t + i\sqrt{1 - t^2}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.
2. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkty $z_1 = 4 + 3i$, $z_2 = 5 + 2i$.

2. Funkcje zespolone zmiennej zespolonej

Jeżeli zarówno argumentem, jak i wartością funkcji $z = f(w)$ są liczby zespolone, to mówimy, że określona jest funkcja zespolona zmiennej zespolonej. Można taką funkcję traktować jako odwzorowanie jednej płaszczyzny (której punktami są liczby z) w drugą płaszczyznę (której punktami są liczby w).
Podstawiając

$$z = x + iy, \quad w = u + iv$$

mamy

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Funkcje $u(x, y)$ i $v(x, y)$ nazywamy częścią rzeczywistą i częścią urojoną funkcji zespolonej $f(z)$.
Przykłady 1. Określić dziedzinę funkcji

$$w = \frac{z + 1}{z - 1}$$

oraz podać jej część rzeczywistą i urojoną.
2. Jaki jest obraz krzywej: a) $x^2 + y^2 = 9$; b) $x = 1$ przy przekształceniu $w = \frac{1}{z}$?
Rozwiązanie. a) Mamy

$$w = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i.$$

Stąd

$$u^2 + v^2 = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)^2 = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Zatem gdy $x^2 + y^2 = 9$, to $u^2 + v^2 = \frac{1}{9}$.

b) Prostą $x = 1$ zapisujemy w postaci $z = 1 + it$ i mamy

$$w = \frac{1}{1+it} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2} i.$$

Zatem równaniami parametrycznymi obrazu są $u = \frac{1}{1+t^2}$, $v = \frac{-t}{1+t^2}$. Rugując parametr t (przez podniesienie obu równości do kwadratu i dodanie) otrzymamy $u^2 + v^2 = u$. Jest to równanie okręgu.

3. Podstawowe funkcje zmiennej zespolonej

Funkcja wykładnicza:

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

ma własności:
a) e^z jest funkcją okresową o okresie $2\pi i$. W szczególności $e^z = 1$ dla $z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$
b) Jeżeli $z = iy$, to $|e^z| = 1$. Stąd $|e^z| = e^{\mathrm{Re} z}$.
Funkcje trygonometryczne określamy wzorami

$$\sin z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^{iz} = e^{-iz}}{2}.$$

Są to funkcje okresowe, o okresie 2π, ale nieograniczone!

4. Przekształcenie Laplace'a

Definicja 1. *Funkcję $f(t)$ zmiennej rzeczywistej, przedziałami ciągłą, nazywamy* oryginałem*, gdy*

1. *$f(t) = 0$ dla $t < 0$;*
2. *$f(t) = \frac{1}{2}(f(t-0) + f(t+0))$ (symbole $f(t-0)$ i $f(t+0)$) oznaczają granicę lewostronną i prawostronną w punkcie t);*
3. *istnieją liczby M i α takie, że $|f(t)| \leqslant Me^{\alpha t}$ dla $t > 0$.*

Powyższe warunki określają pewien zbiór funkcji — klasę oryginałów. Na tym zbiorze określimy teraz pewne przekształcenie.

Definicja 2. *Dla funkcji $f(t)$ należącej do klasy oryginałów, określamy funkcję zespoloną:*

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \quad s \in \mathbb{C}$$

Funkcję tę nazywamy transformatą Laplace'a *oryginału $f(t)$ i piszemy $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$.*

Warunki sformułowane w definicji oryginału zapewniają zbieżność całki. Zatem przyporządkowanie:

$$\text{oryginał } f(t) \mapsto \text{transformata } F(s),$$

jest przeksztaceniem klasy oryginałów w pewien podzbiór zbioru funkcji zespolonych. To przekształcenie nazywamy *przekształceniem (transformacją) Laplace'a*. Używany jest także termin *operator Laplace'a*.

Przykłady Znajdziemy z definicji transformatę funkcji:

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad t = 0 \\ 1 & , \quad t > 0 \end{cases}$$

Funkcja ta nazywa się *funkcją Heaviside'a*.
Obliczamy:

$$\mathcal{L}[\mathbf{1}(t)] = \int_0^\infty e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st}|_0^\infty = \frac{1}{s}.$$

Podobnie znajdziemy

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a},$$
$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}},$$
$$\mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2},$$
$$\mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2+a^2},$$

i inne transformaty.
Ze znanych własności całki wynika, że przekształcenie Laplace'a jest liniowe, tzn.

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)].$$

Np.

$$\mathcal{L}[2e^{3t} - 5\sin 2t] = 2\mathcal{L}[e^{3t}] - 5\mathcal{L}[\sin 2t] = 2\frac{1}{s-3} - 5\frac{2}{s^2+4}.$$

Przekształcenie Laplace'a jest także różnowartościowe, a więc każdej transformacie odpowiada jednoznacznie określony oryginał. Można go znaleźć stosując wzór na *odwrotne przekształcenie Laplace'a*:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{st} F(s) ds.$$

Jest to jednak niepraktyczne. Elementarną metodą znajdowania oryginału w sytuacji gdy transformata $F(s)$ jest funkcją wymierną jest jej rozkład na ułamki proste i znalezienie oryginałów przy pomocy tablic.

Przykład . Jeżeli $F(s) = \frac{s-1}{s^2+s}$, to znajdujemy rozkład:

$$F(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s},$$

i odczytujemy z tablic:

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{2}{s+1}] = e^{-t}, \quad \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s}] = 1$$

więc $f(t) = 2e^{-t} - 1$.
Inną metodą, którą omówimy później, jest posłużenie się tzw. *residuami*.
Obecnie podamy kluczowe dla zastosowań **twierdzenie o transformacie pochodnej**.

Twierdzenie 1. *Jeżeli istnieje n-ta pochodna funkcji f, to*

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n\mathcal{L}[f(t)] - s^{n-1}f(0+) - s^{n-2}f'(0+) - \cdots - f^{(n-1)}(0+).$$

gdzie symbole $f(0+)$, $f'(0+)$, ... oznaczają prawostronne granice w punkcie 0.

W szczególności dla $n = 1$ i $n = 2$ otrzymujemy:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0+),$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0+) - f'(0+).$$

5. Zastosowanie przekształcenia Laplace'a do rozwiązywania równań różniczkowych

Interpretując twierdzenie 1 możemy powiedzieć, że różniczkowaniu oryginału odpowiada mnożenie transformaty przez s. Zatem jeśli mamy równanie różniczkowe z funkcją niewiadomą $y(t)$, to po obliczeniu transformat obu stron równania otrzymamy **równanie algebraiczne** z funkcją niewiadomą $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$. Należy wyznaczyć teraz funkcję $Y(s)$, a następnie znaleźć odpowiadający jej oryginał $y(t)$ — będzie to rozwiązanie równania różniczkowego.
Przykład Znaleźć rozwiązanie szczególne równania $y''+2y'+2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
Rozwiązanie. Transformując otrzymamy:

$$s^2Y - s + 2(sY - 1) + 2Y = 0$$

(zwróćmy uwagę, że w miejsce granic prawostronnych o których mowa w twierdzeniu 1 podstawiamy warunki początkowe).
Wyznaczamy Y i rozkładamy na ułamki:

$$Y = \frac{s+2}{s^2+2s+2} = \frac{s+1+1}{(s+1)^2+1} = \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1}$$

Teraz z tablic znajdziemy

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{s+1}{(s+1)^2+1}] = e^{-t}\cos t, \quad \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s+1)^2+1}] = e^{-t}\sin t,$$

a więc

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y] = e^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t = e^{-t}(\cos t + \sin t).$$

Zauważmy, że gdyby nie było warunków początkowych, to w miejsce granic lewostronnych należałoby wpisać stałe dowolne. To oczywiście skomplikowałoby rachunki. Dlatego też ta metoda (nazywana również *metodą operatorową*) jest stosowana najczęściej do zagadnień z warunkami początkowymi.

Transformaty ważniejszych funkcji

	Oryginał	**Transformata**
1.	$\mathbf{1}$	$\frac{1}{s}$
2.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
3.	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$
4.	$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$
5.	$\cos\beta t$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$
6.	$\sinh\beta t$	$\frac{\beta}{s^2-\beta^2}$
7.	$\cosh\beta t$	$\frac{s}{s^2-\beta^2}$
8.	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$
9.	$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$
10.	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$
11.	$t\sin\beta t$	$\frac{2\beta s}{(s^2+\beta^2)^2}$
12.	$t\cos\beta t$	$\frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$
13.	$te^{\alpha t}$	$\frac{1}{(s-\alpha)^2}$

Przykład Znaleźć rozwiązanie szczególne równania

$$y'' + 4y = 2\cos 2x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 4.$$

Rozwiązanie. Transformując otrzymamy:

$$s^2Y - 4 + 4Y = \frac{2s}{s^2+4}$$

Wyznaczamy Y i rozkładamy na ułamki:

$$Y = \frac{4s^2+2s+16}{(s^2+4)^2} = \frac{4}{s^2+4} + \frac{1}{2}\frac{4s}{(s^2+4)^2}$$

Teraz z tablic znajdziemy

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{4}{s^2+4}] = 2\sin 2t, \quad \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{2}\frac{4s}{(s^2+4)^2}] = \frac{1}{2}t\sin 2t,$$

a więc

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y] = 2\sin 2t + \frac{1}{2}t\sin 2t.$$

6. Residuum funkcji zespolonej

Definicja 3. *Niech $f(s)$ będzie funkcją wymierną zmiennej zespolonej s:*

$$f(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}, \quad \text{gdzie } P(s), Q(s) \text{ są wielomianami.}$$

Liczbę s_0 nazywamy k-krotnym biegunem funkcji $f(s)$, gdy s_0 jest k-krotnym pierwiastkiem $Q(s)$ oraz $P(s_0) \neq 0$.

Definicja 4. *Jeżeli s_0 jest k-krotnym biegunem funkcji $f(s)$, to* residuum *funkcji $f(s)$ w s_0 nazywamy liczbę:*

$$\operatorname*{res}_{s=s_0} f(s) = \lim_{s\to s_0}(s-s_0)f(s),$$

gdy s_0 jest biegunem jednokrotnym;

$$\operatorname*{res}_{s=s_0} f(s) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{s\to s_0}\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}[(s-s_0)^k f(s)],$$

gdy s_0 jest biegunem k-krotnym.

Uwaga. Zarówno pojęcie bieguna, jak i residuum (słowo łacińskie, znaczy *reszta*; w liczbie pojedynczej nieodmienne; liczba mnoga: residua, tych residuów) definiuje się zwykle ogólniej. Do naszych celów wystarczy jednak ta uproszczona wersja.
Przykłady . Znaleźć bieguny i obliczyć residua funkcji:
1) $f(s) = \frac{s^2+1}{s(s-1)^2}$.
Mianownik ma dwa miejsca zerowe: 0 (jednokrotne) i 1 (2-krotne). Nie są one zerami licznika, więc są biegunami, odpowiednio jedno- i 2-krotnymi. Obliczamy:

$$\operatorname*{res}_{s=0} f(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{s^2+1}{s(s-1)^2} = 1,$$

oraz

$$\operatorname*{res}_{s=1} f(s) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to 1}\left(\frac{s^2+1}{s}\right)' = \lim_{s\to 1}\left(1-\frac{1}{s^2}\right) = 0$$

2) $f(s) = \frac{s+1}{s^2+1}$.
Są dwa bieguny jednokrotne: i oraz $-i$. Obliczamy:

$$\operatorname*{res}_{s=i} f(s) = \lim_{s\to i}(s-i)\frac{s+1}{(s-i)(s+i)} = \frac{i+1}{2i} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i,$$

$$\operatorname*{res}_{s=-i} f(s) = \lim_{s\to -i}(s+i)\frac{s+1}{(s-i)(s+i)} = \frac{-i+1}{-2i} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.$$

7. Zastosowanie residuów do obliczania oryginałów dla transformat

Twierdzenie 2. *Jeżeli transformata $F(s)$ jest funkcją wymierną, to oryginał $f(t)$ wynosi:*

$$f(t) = \sum \operatorname*{res}_{s=s_k} F(s)e^{st},$$

gdzie suma rozciąga się na wszystkie bieguny s_k funkcji $F(s)$.

Mamy następujące fakty.
Fakt 1. Jeżeli s_1, s_2 są biegunami sprzężonymi, to

$$\operatorname*{res}_{s=s_1} F(s)e^{st} + \operatorname*{res}_{s=s_2} F(s)e^{st} = 2\,\mathrm{Re}\Big(\operatorname*{res}_{s=s_1} F(s)e^{st}\Big).$$

Inaczej mówiąc, residua są liczbami sprzężonymi (można to było zauważyć w Przykładzie 2 wyżej). Dowód własności jest nietrudny.

Fakt 2. Jeżeli s_0 jest biegunem pojedynczym funkcji $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, to

$$\operatorname*{res}_{s=s_0} F(s)e^{st} = \frac{P(s_0)}{Q'(s_0)}e^{s_0 t}.$$

Dowód:

$$\lim_{s\to s_0}(s-s_0)\frac{P(s)}{Q(s)}e^{st} = \lim_{s\to s_0}\frac{P(s)}{\frac{Q(s)-Q(s_0)}{s-s_0}}e^{st} = \frac{P(s_0)}{Q'(s_0)}e^{s_0 t}.$$

Wnioskiem z wykazanej własności jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3. (o rozkładzie) *Jeżeli $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ jest transformatą i wszystkie pierwiastki s_k wielomianu $Q(s)$ są jednokrotne, to*

$$f(t) = \sum \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)}e^{s_k t},$$

gdzie suma rozciąga się na wszystkie pierwiastki.

8. Zadania — rozwiązywanie równań

1. $y' - y - 1 = t$, $y(0) = 2$
Obliczamy:

$$Y = \frac{2s^2+s+1}{s^2(s-1)}$$

$$\operatorname*{res}_{s=1} Y(s)e^{st} = \lim_{s\to 1}\frac{2s^2+s+1}{s^2}e^{st} = 4e^t,$$

oraz

$$\operatorname*{res}_{s=0} Y(s)e^{st} = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to 1}\left(\frac{2s^2+s+1}{s-1}e^{st}\right)' = -2-t,$$

więc $y = -2 - t + 4e^t$.
2. $y'' + y = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$
Obliczamy:

$$Y = \frac{1}{s(s^2+1))}$$

$$\operatorname*{res}_{s=1} Y(s)e^{st} = \lim_{s\to 1}\frac{1}{s^2+1}e^{st} = 1$$

oraz

$$\operatorname*{res}_{s=i} Y(s)e^{st} = \lim_{s\to i}\frac{1}{s(s+i)e^{st}} = -\frac{1}{2}(\cos t + i\sin t),$$

$$\operatorname*{res}_{s=-i} Y(s)e^{st} = \lim_{s\to -i}\frac{1}{s(s+i)e^{st}} = -\frac{1}{2}(\cos t - i\sin t)$$

więc $y = 1 - \cos t$.
3. Rozwiązać układ

$$\begin{cases} y' + 3y + z = 0 \\ z' - y + z = 0 \end{cases}$$

z warunkami początkowymi $y(0) = 1$, $z(0) = 1$.