Model przepływów międzygałęziowych (model Leontiewa)

Maciej Grzesiak

Przedstawimy tzw. *analizę wejścia-wyjścia* jako narzędzie do badań ekonomicznych. Stworzymy matematyczny model gospodarki, w którym można będzie, stosując odpowiednie operacje matematyczne, uzyskiwać wyniki, które następnie będą mogły być zastosowane w świecie rzeczywistym. Ale matematyka zajmuje się symbolami i operacjami na nich, a nie wielkościami rzeczywistymi, jak węgiel, stal, pieniądze itp. Zatem pierwszym krokiem do stworzenia modelu jest wybór odpowiednich wielkości i ich matematyczne przedstawienie. Ważne jest, aby pamiętać, że to z konieczności wiąże się z uproszczeniami. To, jakie aproksymacje są odpowiednie i dopuszczalne wynika w znacznej mierze z przewidywanego zastosowania modelu.
Model, który przedstawimy, będzie opisywał jeden aspekt gospodarki — jej zdolność do produkcji rozmaitych dóbr. Nie będzie więc w nim odniesień do np. transportu, banków, czy rządu.
Wytwarzane dobra są zazwyczaj produkowane przez wiele firm, a na ogół każda firma wytwarza też rozmaite produkty. Podstawowe uproszczenie polega na tym, że założymy, że gospodarka składa się z n gałęzi (przemysłów). Założymy też, że wszystkie firmy wytwarzające dane dobro robią to tak samo efektywnie, a więc nie ma potrzeby rozważania ich osobno, tylko wspólnie jako przemysł, np. produkcja stali.
Przyjmiemy też, że każdy przemysł wytwarza tylko jedno dobro, co jest nierealistyczne, bo np. przemysł chemiczny wytwarza tysiące rozmaitych produktów. Ale w modelu można np. rozpatrywać osobno przemysł produkcji kwasu siarkowego i przemysł produkcji benzyny. To kwestia wyboru wiążąca się z przewidywanym zastosowaniem modelu. Należy jednak ciągle pamiętać, jak znaczne są to uproszczenia.
Zaletą tworzonego przez nas modelu będzie to, że dopuści on interakcje rozmaitych przemysłów w tym sensie, że produkt jednego jest surowcem dla innego przemysłu, albo też produktem końcowym, dla finalnego nabywcy.
Będzie to *model statyczny*, tzn. zakładający, że żadne strukturalne zmiany (np. technologii lub cen) nie mają miejsca. To jest realistyczne, jeżeli odnosimy się do raczej krótkiego okresu czasu (np. maksimum rok). Stworzenie *modelu dynamicznego* opisującego rozmaite zmiany, jest bardziej skomplikowane.
Modele można tworzyć w ujęciu ilościowym lub w ujęciu wartościowym. Zaczniemy od tego pierwszego.

Przepływy w ujęciu ilościowym

Przy tworzeniu modelu przyjmiemy, że kolejne przemysły są oznaczane liczbami $1, 2, \ldots, n$, a wielkości produktu globalnego przemysłu j (w danym okresie) to Q_j. Liczba Q_j może oznaczać wielkość fizyczną (tony, sztuki,...) lub pieniężną. Przyjmiemy, że są to wielkości fizyczne.

"Wyjście" Q_j przemysłu j jest używane przez inne przemysły (w tym także sam przemysł j) lub sprzedawane odbiorcy końcowemu. Część sprzedawaną będziemy nazywali produkcją końcową i oznaczali q_j. W praktyce część produkcji może być magazynowana, ale w tym modelu to pominiemy.

Niech q_{jk} oznacza wielkość produktu j zużywanego przez przemysł k. Wtedy mamy

$$\begin{array}{ccccccccccc} Q_1 & = & q_{11} & + & q_{12} & + & \cdots & + & q_{1n} & + & q_1 \\ Q_2 & = & q_{21} & + & q_{22} & + & \cdots & + & q_{2n} & + & q_2 \\ \multicolumn{11}{c}{\dotfill} \\ Q_n & = & q_{n1} & + & q_{n2} & + & \cdots & + & q_{nn} & + & q_n \end{array} \tag{1}$$

Te równania, nazywane *bilansowymi (material balances)*, zbyt wiele nie przekazują. Przyjmijmy, że q_{jk} (wielkość produktu j zużywanego przez przemysł k) zależy od wyjścia Q_k przemysłu k, a dokładniej, że $q_{jk} = a_{jk}Q_k$, gdzie a_{jk} jest współczynnikiem proporcjonalności (tzw. *współczynniki technologiczne*). Zatem równania bilansowe przyjmą postać:

$$\begin{array}{ccccccccccc} Q_1 & = & a_{11}Q_1 & + & a_{12}Q_2 & + & \cdots & + & a_{1n}Q_n & + & q_1 \\ Q_2 & = & a_{21}Q_1 & + & a_{22}Q_2 & + & \cdots & + & a_{2n}Q_n & + & q_2 \\ \multicolumn{11}{c}{\dotfill} \\ Q_n & = & a_{n1}Q_1 & + & a_{n2}Q_2 & + & \cdots & + & a_{nn}Q_n & + & q_n \end{array}$$

lub po przeniesieniu

$$\begin{array}{rcrcccrcc} (1-a_{11})Q_1 & - & a_{12}Q_2 & - & \cdots & - & a_{1n}Q_n & = & q_1 \\ -a_{21}Q_1 & + & (1-a_{22})Q_2 & - & \cdots & - & a_{2n}Q_n & = & q_2 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ -a_{n1}Q_1 & - & a_{n2}Q_2 & - & \cdots & + & (1-a_{nn})Q_n & = & q_n \end{array} \tag{2}$$

Układ (2) można zapisać w postaci macierzowej. Niech $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ oznacza *macierz współczynników technologicznych.* Wtedy macierzą układu (2) jest $\mathbf{I} - \mathbf{A}$, a więc układ można zapisać jako równanie macierzowe

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

gdzie $\mathbf{x} = (Q_1, Q_2 \ldots, Q_n)^T$, $\mathbf{b} = (q_1, q_2 \ldots, q_n)^T$. Macierz $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ nazywamy *macierzą Leontiewa* lub *macierzą struktury technicznej.* Natomiast jej macierz odwrotną $\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ nazywamy *macierzą współczynników materiałochłonności* lub *macierzą współczynników dodatkowego zapotrzebowania.*

Zanim omówimy możliwości wynikające z tego modelu, opiszemy najpierw jak można uzyskać współczynniki technologiczne. Dane dla pewnego okresu (np. roku) zbiera się w postaci tabeli, w której każdy wiersz odpowiada jednemu przemysłowi.

Przemysł	Produkcja globalna	Produkcja zużywana przez: 1	2	...	n	Produkcja końcowa
1	Q_1	q_{11}	q_{12}	$\cdots$	q_{1n}	q_1
2	Q_2	q_{21}	q_{22}	$\cdots$	q_{2n}	q_2
...	...	...	...	...	...	...
n	Q_n	q_{n1}	q_{n2}	$\cdots$	q_{nn}	q_n

Współczynniki a_{jk} liczymy jako ilorazy

$$a_{jk} = \frac{q_{jk}}{Q_k}$$

W praktyce nie jest to proste, po pierwsze ze względu na trudność uzyskania danych w tej postaci. Następnie, w rzeczywistości mamy różne odmiany produktów, a więc trzeba to jakoś uśrednić; trzeba też uwzględnić zmiany w zapasach magazynowych, itd.

Wróćmy do możliwych korzyści ze stosowania tego modelu. Jeśli np. znamy zapotrzebowanie na poszczególne produkty dla pewnego przyszłego okresu, to ważna będzie wiedza, jaka musi być minimalna produkcja poszczególnych przemysłów, aby zapewnić dostateczną wielkość produktów końcowych.

Matematyczne przedstawienie problemu jest następujące. Przyszłe zapotrzebowanie opisujemy wektorem $\mathbf{b}_0 = (q_1, \ldots, q_n)^T$, a produkcję wektorem wyjść $\mathbf{x}_0 = (Q_1, \ldots, Q_n)^T$. Są to wektory kolumnowe, dalej traktowane jako macierze. Przypuśćmy, że zapotrzebowanie zmienia się na $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{c}$, gdzie $\mathbf{c}$ jest wektorem zmiany zapotrzebowania. Wektor produkcji zmienia się na $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{z}$, gdzie $\mathbf{z}$ jest wektorem zmiany produkcji. Wtedy $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{b}$, czyli

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{x}_0 + \mathbf{z}) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{c},$$

więc

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}_0 + (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{z} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{c},$$

i po redukcji (bo $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_0$) mamy $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{z} = \mathbf{c}$.

Zatem wyznaczenie wektora zmian odbywa się na tej samej zasadzie, co obliczenie wektora produkcji.

Rozważmy szczególny przypadek, w którym zmiana następuje tylko w jednej pozycji zapotrzebowania. Mianowicie przypuśćmy, że j-te zapotrzebowanie zwiększa się o λ. Wtedy $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{e}_j$, gdzie $\mathbf{e}_j$ jest zwykłym wektorem jednostkowym. Niech $\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ będzie, jak poprzednio, macierzą współczynników dodatkowego zapotrzebowania. Wtedy $\mathbf{z} = \mathbf{Mc}$. Jeżeli $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{e}_j$, to $\mathbf{z} = \lambda \mathbf{M} \mathbf{e}_j = \lambda \mathbf{m}_j$, gdzie $\mathbf{m}_j$ oznacza j-tą kolumnę macierzy $\mathbf{M}$. A więc gdy zapotrzebowanie na produkt j zwiększa się o λ, to produkcja musi się zmienić z $\mathbf{x}_0$ na $\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{m}_j$. Wynika stąd następująca interpretacja elementów macierzy $\mathbf{M}$.

Wniosek 1 *Aby zwiększyć produkcję końcową w dziale j o jednostkę ($\Delta Q_j = 1$) należy zwiększyć produkcję działu i o m_{ij} jednostek (tj. $\Delta q_i = m_{ij}$).*

Przykład. Dana jest tablica przepływów międzygałęziowych:

Zakład nr	Produkcja globalna	Przepływy			Produkcja końcowa
		q_{j1}	q_{j2}	q_{j3}	
1	250	25	70	30	125
2	350	100	105	75	70
3	300	50	35	60	155

Na podstawie tablicy
a) utworzyć macierz współczynników technologicznych,
b) zinterpretować współczynniki a_{12} i a_{32},
c) wyznaczyć jak zmienia się rozmiary produkcji końcowej, jeżeli ilości produktów globalnych zakładów 1 i 2 wzrosły odpowiednio o 100 i 80 jednostek, natomiast zakładu 3 zmalały o 90 jednostek.
d) wyznaczyć wektor produkcji globalnej, jeśli wektor wymaganej produkcji końcowej wynosi $(200, 150, 200)^T$.
Rozwiązanie.
a) Ponieważ $a_{jk} = \frac{q_{jk}}{Q_k}$, więc

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{25}{250} & \frac{70}{350} & \frac{30}{300} \\ \frac{100}{250} & \frac{105}{350} & \frac{75}{300} \\ \frac{50}{250} & \frac{35}{350} & \frac{60}{300} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}25 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{bmatrix}.$$

b) $a_{12} = 0{,}2$ oraz $a_{32} = 0{,}1$, więc do produkcji jednostki przemysłu drugiego potrzebne jest 0,2 jednostki przemysłu 1 i 0,1 jednostki przemysłu 3.
c) Ponieważ $\mathbf{c} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{z}$ i $\mathbf{z} = (100, 80, -90)^T$, więc

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0{,}9 & -0{,}2 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & 0{,}7 & -0{,}25 \\ -0{,}2 & -0{,}1 & 0{,}8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ -90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 83 \\ 38,5 \\ -100 \end{bmatrix}.$$

d) Ponieważ $\mathbf{x} = \mathbf{Mb}$, gdzie

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}37 & 0{,}44 & 0{,}31 \\ 0{,}95 & 1{,}8 & 0{,}68 \\ 0{,}46 & 0{,}33 & 1{,}41 \end{bmatrix},$$

oraz $\mathbf{b} = (200, 150, 200)^T$, więc

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1{,}37 & 0{,}44 & 0{,}31 \\ 0{,}95 & 1{,}8 & 0{,}68 \\ 0{,}46 & 0{,}33 & 1{,}41 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 150 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 401{,}8 \\ 595{,}6 \\ 424{,}9 \end{bmatrix}.$$

Przepływy w ujęciu wartościowym
Jeżeli układ gospodarczy składa się z n jednorodnych przemysłów i p_i oznacza jednostkową cenę wyrobu produkowanego w i-tym przemyśle, to wartość produkcji X_i i wartości przepływów x_{ij} wynoszą

$$X_i = Q_i p_i$$
$$x_{ij} = q_{ij} p_i$$
$$x_i = q_i p_i$$

Liczbę

$$b_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j} = \frac{q_{ij}p_i}{Q_jp_j} = a_{ij}\frac{p_i}{p_j}$$

nazywamy *współczynnikiem techniczno-finansowym.* Określa on niezbędną wartość produktu wytworzonego w dziale i, który należy zużyć w dziale j na wytworzenie wartości globalnej wynoszącej jedną jednostkę pieniężną.
Matematyczna analiza modelu przepływów w ujęciu wartościowym jest analogiczna do analizy przepływów w ujęciu ilościowym. Jedynie macierz $\mathbf{A}$ współczynników technologicznych zastępujemy macierzą $\mathbf{B}$ współczynników techniczno-finansowych.

Wyznaczanie cen produktów przy pomocy modelu przepływów.
Jeśli macierzą współczynników technicznych jest macierz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ i p_j jest ceną jednostki produktu j, to koszt materiałowy wyprodukowania tej jednostki wynosi

$$a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \cdots + a_{nj}p_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}p_i.$$

Cena powinna uwzględniać także robociznę i zysk. Gdy to uwzględnimy przyjmując, że jednostkowe koszty robocizny w przemyśle j wynoszą k_j a jednostkowy zysk z_j, to otrzymamy zależności

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}p_i + k_j + z_j \qquad \text{dla } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Jeżeli jednokolumnowe macierze cen, kosztów, i zysków oznaczymy przez $\mathbf{p}$, $\mathbf{k}$ i $\mathbf{z}$ odpowiednio, to całość można zapisać równaniem macierzowym:

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}^T\mathbf{p} + \mathbf{k} + \mathbf{z}.$$

Stąd

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)\mathbf{p} = \mathbf{k} + \mathbf{z},$$
$$\mathbf{p} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)^{-1}(\mathbf{k} + \mathbf{z}).$$

Przykład. Dana jest macierz współczynników technologicznych dla trzech wytwarzanych produktów:

$$\begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{bmatrix}$$

oraz wektory $\mathbf{k}$ (kosztów jednostkowych) i $\mathbf{z}$ (zysków jednostkowych)

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \\ 0{,}3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}2 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć ceny produktów.

Rozwiązanie. Mamy
$$\mathbf{p} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)^{-1}(\mathbf{k} + \mathbf{z}),$$
czyli
$$\mathbf{p} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{bmatrix}^T \right)^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \\ 0{,}3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}2 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} \right),$$
a zatem
$$\mathbf{p} = \frac{5}{117} \begin{bmatrix} 33 & 25 & 13 \\ 15 & 61 & 13 \\ 9 & 21 & 39 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}4 \\ 0{,}8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}44 \\ 1{,}74 \\ 1{,}85 \end{bmatrix}$$

Macierze produktywne.
Naturalne jest pytanie, czy przy danej macierzy współczynników technologicznych można otrzymać dowolny nieujemny wektor produkcji końcowej z odpowiedniego nieujemnego wektora produkcji całkowitej. Zaczniemy jednak od podstawowego pytania: czy istnieje chociaż jeden wektor produkcji całkowitej, przy którym produkcja całkowita przewyższa zużycie produkcyjne?
Do formalnych zapisów wprowadzimy oznaczenie:
$\mathbf{x} \gg \mathbf{y} \Leftrightarrow$ każda współrzędna wektora $\mathbf{x}$ jest większa od odpowiedniej współrzędnej wektora $\mathbf{y}$.
Uwaga: zapis $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ dla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ oznacza, że wszystkie współrzędne wektora $\mathbf{x}$ są nieujemne, i przynajmniej jedna jest dodatnia.

Definicja 1 Macierz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ stopnia n o elementach nieujemnych nazywamy *macierzą produktywną* jeśli istnieje taki wektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ o nieujemnych współrzędnych, że odpowiadający mu wektor produkcji końcowej $(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}$ ma wszystkie współrzędne dodatnie, czyli $\mathbf{x} \gg \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Warunek produktywności można zapisać w postaci:
$$\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0} \wedge \mathbf{x} \gg \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Twierdzenie 1 *Jeśli macierz* $\mathbf{A}$ *jest produktywna, to dla dowolnego* $\mathbf{b} \geqslant \mathbf{0}$ *równanie*
$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
ma nieujemne rozwiązanie.

Dla dowodu wykażemy najpierw lemat.

Lemat 1 *Jeśli macierz* $\mathbf{A}$ *jest produktywna i* $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{A}\mathbf{x}$*, to* $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$.

Dowód. Z założenia istnieje $\bar{\mathbf{x}}$ takie, że $\bar{\mathbf{x}} \gg \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}$. Ale $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} \geqslant \mathbf{0}$ (ponieważ $\bar{\mathbf{x}} \geqslant \mathbf{0}$ i $a_{ij} \geqslant 0$), więc $\bar{\mathbf{x}} \gg \mathbf{0}$. Przypuśćmy, że $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{A}\mathbf{x}$, ale $\mathbf{x} \ngeqslant \mathbf{0}$. Niech
$$\theta = \inf\{\bar{\theta} : \ \mathbf{x} + \bar{\theta}\bar{\mathbf{x}} \geqslant \mathbf{0}\}.$$
Niech $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \theta\bar{\mathbf{x}}$. Wtedy $\mathbf{x}' \geqslant \mathbf{0}$, ale $\mathbf{x}'$ musi mieć co najmniej jedną współrzędną, np. x_1, równą 0. Zarazem $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \theta\bar{\mathbf{x}} \gg \mathbf{A}\mathbf{x} + \theta\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} \gg \mathbf{0}$. A zatem musi być $x_1 > 0$, sprzeczność.

Wniosek 2 *Jeśli macierz* $\mathbf{A}$ *jest produktywna, to macierz* $\mathbf{I}-\mathbf{A}$ *ma rząd* n*, a więc jest nieosobliwa.*

D o w ó d. Jeśli $(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$, to także $(\mathbf{I}-\mathbf{A})(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$. Z lematu wynika wtedy, że $\mathbf{x}\geqslant\mathbf{0}$ oraz $-\mathbf{x}\geqslant\mathbf{0}$, czyli $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.
D o w ó d twierdzenia 1. Ponieważ $\mathbf{I}-\mathbf{A}$ jest nieosobliwa, więc równanie

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

ma jednoznaczne rozwiązanie $\mathbf{x}$. Ale $\mathbf{b}\geqslant\mathbf{0}$, więc $\mathbf{x}-\mathbf{A}\mathbf{x}\geqslant\mathbf{0}$, a więc $\mathbf{x}\geqslant\mathbf{0}$.

Wniosek 3 *Macierz* $\mathbf{A}$ *jest produktywna wtedy, i tylko wtedy, gdy* $(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ *jest nieujemna.*

Przykład. Zbadać, czy jest produktywna macierz

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0{,}05 & 0{,}32 & 0{,}19\\ 0{,}25 & 0{,}1 & 0{,}35\\ 0{,}27 & 0{,}12 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

Obliczamy:

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{bmatrix} 1{,}33 & 0{,}54 & 0{,}49\\ 0{,}56 & 1{,}4 & 0{,}66\\ 0{,}47 & 0{,}35 & 1{,}35 \end{bmatrix}\geqslant 0,$$

a więc macierz $\mathbf{A}$ jest produktywna.

Lemat 2 *Jeśli macierz* $\mathbf{A}$ *jest produktywna, to* $\mathbf{A}^n\to\mathbf{0}$*.*

D o w ó d. Z definicji macierzy produktywnej $\exists\mathbf{x}^*\gg\mathbf{0}$ takie, że $\mathbf{x}^*\gg\mathbf{A}\mathbf{x}^*$. Zatem dla pewnego λ, $0<\lambda<1$, mamy

$$\lambda\mathbf{x}^*\geqslant\mathbf{A}\mathbf{x}^*,$$

więc dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$:

$$\lambda^n\mathbf{x}^*\geqslant\mathbf{A}^n\mathbf{x}^*,$$

skąd wynika, że $\mathbf{A}^n\mathbf{x}^*\to\mathbf{0}$.
Jeżeli $\mathbf{x}^*=\sum_{i=1}^n x_i^*\mathbf{e}_i$, to

$$\mathbf{A}^n\mathbf{x}^*=\sum_{i=1}^n x_i^*\mathbf{A}^n\mathbf{e}_i,$$

przy czym każdy składnik jest nieujemny, więc $\forall i\ \mathbf{A}^n\mathbf{e}_i\to\mathbf{0}$.

Twierdzenie 2 *Jeśli macierz* $\mathbf{A}$ *jest produktywna, to szereg* $\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{A}^k$ *jest zbieżny do* $(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$*.*

D o w ó d. $(\mathbf{I}-\mathbf{A})(\mathbf{I}+\cdots+\mathbf{A}^n)=\mathbf{I}-\mathbf{A}^{n+1}$, więc

$$(\mathbf{I}+\cdots+\mathbf{A}^n)-(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{n+1},$$

oraz

$$\|(\mathbf{I}+\cdots+\mathbf{A}^n)-(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\|\leqslant\|(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\|\cdot\|\mathbf{A}^{n+1}\|\to 0.$$