Relacje

opracował Maciej Grzesiak

17 października 2011

1 Podstawowe definicje

Niech dany będzie zbiór X. X^n oznacza n-tą potęgę kartezjańską zbioru X, tzn zbiór

$$X \times X \times \cdots \times X = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \; x_k \in X \text{ dla } k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Definicja 1 *Relacją n-członową* w zbiorze X nazywamy podzbiór ρ zbioru X^n.

Elementy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniają relację ρ, gdy $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \rho$. W przypadku relacji 2-członowej (*binarnej*) piszemy $x_1 \rho x_2$ zamiast $(x_1, x_2) \in \rho$.

Przykłady

1. W zbiorze $X = \{a, b, c, d, e\}$ relacja

$$\rho = \{(a, a), (a, b), (b, a)\}$$

jest relacją binarną.

2. X = zbiór mieszkańców Poznania. Relacja

$$(x \rho y) \Leftrightarrow (x \text{ studiuje na tej samej uczelni co y})$$

jest relacją binarną.

3. X = zbiór punktów płaszczyzny. Relacja trójczłonowa:

$$((A, B, C) \in \rho) \Leftrightarrow (A, B, C \text{ leżą na tej samej prostej}).$$

4. $X = \mathbb{N}$; $x \rho y \Leftrightarrow x \leqslant y$.

5. $X = \mathbb{N}$; $x \rho y \Leftrightarrow x \mid y$.

W dalszym ciągu ograniczymy się do relacji binarnych.
Ponieważ relacje binarne w X zostały wprowadzone jako podzbiory X^2, więc określona jest suma, iloczyn i uzupełnienie relacji. Można również mówić o zawieraniu się relacji. Specjalne znaczenie mają różne własności relacji binarnych.

Definicja 2 . Mówimy, że relacja ρ jest:

a) *zwrotna*, gdy $\forall x \;\; x \,\rho\, x$;

b) *symetryczna*, gdy $\forall x, y \;\; (x \,\rho\, y) \Rightarrow (y \,\rho\, x)$;

c) *przechodnia*, gdy $\forall x, y, z \;\; (x \,\rho\, y) \wedge (\, y \rho\, z) \Rightarrow (x \,\rho\, z)$;

d) *antysymetryczna*, gdy $\forall x, y \;\; (x \,\rho\, y) \wedge (y \,\rho\, x) \Rightarrow (x = y)$;

e) *spójna*, gdy $\forall x, y \;\; (x \,\rho\, y) \vee (y \,\rho\, x)$.

Definicja 3 . Relację , która jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, nazywamy *relacją równoważności.* Relację , która jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia, nazywamy *relacją porządkującą.*

Można mówić również o relacjach między różnymi zbiorami:

Definicja 4 . Podzbiór iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$ nazywamy *dwuczłonową relacją* między zbiorami X i Y.

Zwróćmy uwagę, że wtedy pojęcie funkcji staje się szczególnym przypadkiem pojęcia relacji. Funkcja jest to relacja prawostronnie jednoznaczna.
Jeszcze uwaga na temat zapisu. Relację między zbiorami X i Y można zapisywać w postaci tablicy (lub macierzy). Wiersze tej tablicy odpowiadają elementom zbioru X, a kolumny — elementom Y. Jeśli elementy x i y są w relacji, to w odpowiednim miejscu tablicy piszemy np. 1 (lub $\surd$).

2 Relacje równoważności

Relacje równoważności klasyfikują elementy zbioru względem jakiejś danej własności, np. równości ułamków, równoległości prostych na płaszczyźnie, podobieństwa trójkątów, równości wieku, równości wzrostu.
Relacje równoważności oznaczać będziemy $\sim$. Tak więc aksjomaty mają postać:

R1. $x \sim x$,

R2. $x \sim y \Rightarrow y \sim x$,

R3. $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Zbiór wszystkich elementów z X równoważnych z x nazywamy *klasą równoważności* elementu x i oznaczamy $[x]$:

$$[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}.$$

Element x nazywamy *reprezentantem* klasy $[x]$.

Definicja 5 . Podziałem zbioru X na klasy nazywamy rodzinę niepustych, parami rozłącznych podzbiorów zbioru X, których suma wynosi X.

Twierdzenie 1 (zasada abstrakcji) . *Niech X będzie zbiorem, a ρ relacją równoważności w X. Wtedy dla dowolnych $x, y \in X$:*

1) $x \in [y] \Leftrightarrow x \sim y$.

2) $[x] = [y] \Leftrightarrow x \sim y$.

3) $X = \bigcup_{x \in X} [x]$.

4) $[x] \cap [y] \neq \emptyset \Leftrightarrow [x] = [y]$.

Dowód. 1) wynika z definicji.
2) $(\Rightarrow) x \in [x] = [y]$, więc z 1) $x \sim y$. $(\Leftarrow)$ jeśli $z \in [x]$, to $z \sim x$, $x \sim y$, więc $z \sim y$, tj. $z \in [y]$. Zatem $[x] \subseteq [y]$. Podobnie inkluzja odwrotna.
3) Jeśli $x \in X$, to $x \in [x] \subseteq \bigcup_{x \in X} [x]$, więc $X \subseteq \bigcup_{x \in X} [x]$. Inkluzja odwrotna jest oczywista, bo $[x] \subseteq X$.
4) Niech $z \in [x] \cap [y]$. Wtedy $z \sim x$, $z \sim y$, więc $x \sim y$, tj. $[x] = [y]$.

Twierdzenie 2 . *Pomiędzy relacjami równoważności w X a podziałami zbioru X na klasy istnieje wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie.*

Dowód pomijamy.

Przykład. Niech $X = \{1, 2, 3\}$. Rozpatrzmy podziały:

$$\begin{aligned} K_1 &= \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \\ K_2 &= \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \\ K_3 &= \{\{1, 3\}, \{2\}, \}, \\ K_4 &= \{\{2, 3\}, \{1\}\}, \\ K_5 &= \{\{1, 2, 3\}\}. \end{aligned}$$

Każdy z tych podziałów wyznacza pewną relację równoważności. (Wypisać!)

Definicja 6 . Zbiór wszystkich klas równoważności relacji równoważności $\sim$ w zbiorze X nazywamy *zbiorem ilorazowym* dla relacji $\sim$ i oznaczamy $X/_\sim$.

$$X/_\sim := \{[x] \mid x \in X\}.$$

W naturalny sposób określone jest tzw. *przekształcenie kanoniczne* :

$$\pi : X \longrightarrow X/_\sim, \pi(x) = [x].$$

Przykłady

1. Niech X — zbiór prostych na płaszczyźnie, $l \sim k \Leftrightarrow l \parallel k$. Klasy równoważności tej relacji to kierunki na płaszczyźnie.

2. Niech X — zbiór wektorów zaczepionych na płaszczyźnie, $(\vec{p} \sim \vec{q}) \Leftrightarrow$ ($\vec{p}$ i $\vec{q}$ mają te same współrzędne). Klasy równoważności tej relacji to wektory swobodne.

3. Relacja przystawania modulo m w zbiorze $\mathbf{Z}$:

$$x \equiv y \bmod m \Leftrightarrow m \mid x - y.$$

Klasami równoważności tej relacji są zbiory:

$$\{\dots, -2m, -m, 0, m, 2m, \dots\},$$

$$\{\dots, -2m + 1, -m + 1, 1, m + 1, 2m + 1, \dots\},$$

$$\vdots$$

Każda klasa jest więc zbiorem liczb o postaci $n + km, k \in \mathbf{Z}$. Zbiór ten zawiera liczbę $r_m(n)$, będącą resztą z dzielenia n przez m. Te reszty to liczby $0, 1, 2, \dots, m-1$. Tworzą one pełny zbiór reprezentantów klas równoważności $\{n + km\}$.

3 Relacje porządkujące

Relację porządkującą oznaczamy zazwyczaj symbolem $\leqslant$. Aksjomaty relacji porządkującej mają postać:

P1. $x \leqslant x$;

P2. $x \leqslant y \ \wedge \ y \leqslant x \Rightarrow x = y$.

P3. $x \leqslant y \ \wedge \ y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$;

Parę $(X, \leqslant)$ nazywamy *zbiorem częściowo uporządkowanym* lub po prostu *zbiorem uporządkowanym* . Jeśli dodatkowo zachodzi:

P4. $x \leqslant y \ \vee \ y \leqslant x$

to relację nazywamy *porządkiem liniowym*, a parę $(X, \leqslant)$ *zbiorem uporządkowanym liniowo.*
Jeśli $x \leqslant y \ \wedge \ y \neq x$, to piszemy $x < y$. Zapis $x \geqslant y$ oznacza, że $y \leqslant x$.

Przykłady

1. Niech M będzie dowolnym zbiorem, $X = P(M)$, gdzie $P(M)$ oznacza zbiór wszystkich podzbiorów zbioru M. Określamy:

$$A \leqslant B \Leftrightarrow A \subseteq B.$$

Jest to porządek, ale nie liniowy.

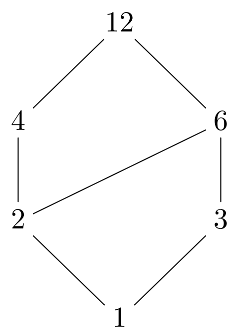
2. $X = \mathbb{N}; m \leqslant n \Leftrightarrow m$ jest mniejsze lub równe n.

3. $X = \mathbb{N}; m \leqslant n \Leftrightarrow m \mid n$.

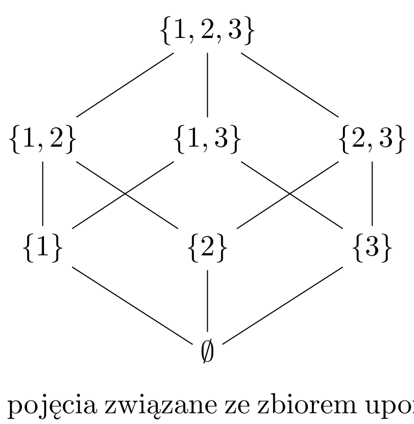
Relacje porządkujące w zbiorze skończonym można przedstawiać graficznie za pomocą *diagramów Hasse'a.* Elementy zbioru X oznacza się punktami i fakt zachodzenia relacji $x \leqslant y$ oznacza się na diagramie rysując y wyżej niż x i łącząc je ze sobą, o ile między nimi nie leży inny element zbioru.

Przykłady

1. $X = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, relacja podzielności.



2. $X = P(M)$, relacja inkluzji, $M = \{1, 2, 3\}$.



Wymieńmy jeszcze niektóre pojęcia związane ze zbiorem uporządkowanym $(X, \leqslant)$. Niech $Y \subseteq X$.

Definicja 7 . Element $a \in Y$ nazywamy *elementem najmniejszym* zbioru Y, jeśli $\forall y \in Y\ a \leqslant y$. Element $a \in Y$ nazywamy *elementem minimalnym* zbioru Y, jeśli $\forall y \in Y\ (y \leqslant a) \Rightarrow (y = a)$. Element $a \in Y$ nazywamy *elementem największym* zbioru Y, jeśli $\forall y \in Y\ y \leqslant a$. Element $a \in Y$ nazywamy *elementem maksymalnym* zbioru Y, jeśli $\forall y \in Y\ \ (a \leqslant y) \Rightarrow (y = a)$.

Przykłady

1. Zbiory $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ uporządkowane przez $\leqslant$ nie mają elementu minimalnego. W zbiorze $\mathbb{N}$ istnieje element najmniejszy 1.

2. W zbiorze $\mathbb{N}$ uporządkowanym przez relację podzielności istnieje element najmniejszy 1. W $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ nie ma elementu najmniejszego; elementem minimalnym jest każda liczba pierwsza.

3. Spójrzmy na diagramy Hasse'a wyżej. Z pierwszego odczytujemy, że 1 jest elementem najmniejszym, a 12 — największym. Z drugiego — że $\emptyset$ jest elementem najmniejszym, a $\{1, 2, 3\}$ — największym.

4 Łańcuchy i antyłańcuchy

Podzbiór B zbioru A częściowo uporządkowanego przez relację $\leqslant$ nazywamy *łańcuchem,* jeżeli relacja $\leqslant$ ograniczona do B jest spójna, tj. każde dwa elementy z B są porównywalne. Inaczej mówiąc, $(B, \leqslant)$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym. Natomiast podzbiór C zbioru A nazywamy *antyłańcuchem,* jeśli żadne dwa różne elementy z C nie są w relacji.

Przykład . Relacja $\leqslant$ w zbiorze $\{a, b, c, d, e\}$ jest określona tablicą:

	a	b	c	d	e
a	1	1	1	1	1
b		1	1		1
c			1		1
d				1	1
e					1

(jak wygląda diagram Hasse'a tej relacji?). Łańcuchy to $\{a, b, c, e\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, d, e\}$ itd. (m.in. wszystkie zbiory jednoelementowe). Antyłańcuchami są $\{b, d\}$, $\{c, d\}$ i wszystkie zbiory jednoelementowe.
Zarówno łańcuchy, jak i antyłańcuchy wygodnie jest znajdować za pomocą diagramu Hasse'a.
Między łańcuchami i antyłańcuchami istnieje bliskie powiązanie, wyrażone twierdzeniem Dilwortha i dualnym twierdzeniem Dilwortha. Podamy drugie z nich.

Twierdzenie 3 (dualne twierdzenie Dilwortha) . *Niech $(A, \leqslant)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym, w którym maksymalna liczność łańcucha (tj. liczba elementów łańcucha) wynosi n. Wtedy elementy zbioru A można podzielić na n rozłącznych antyłańcuchów.*

Dowód (przez indukcję względem n). Dla $n = 1$ twierdzenie jest oczywiste. Zakładamy teraz, że twierdzenie zachodzi, gdy maksymalna liczność łańcucha wynosi $n - 1$. Niech $(A, \leqslant)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym, dla którego maksymalna liczność łańcucha równa jest n. Niech M oznacza zbiór elementów maksymalnych. M jest niepustym antyłańcuchem. Zbiór $P \setminus M$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym, w którym maksymalna liczność łańcucha wynosi $n-1$. Zatem $P \setminus M$ daje się przedstawić w postaci sumy

$$P \setminus M = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$$

rozłącznych antyłańcuchów. Wobec tego

$$A = M \cup B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n,$$

co kończy dowód. □

Uwaga. Twierdzenie Dilwortha otrzymamy zamieniając ze sobą słowa "łańcuch" i "antyłańcuch". Stwierdza ono, że jeśli maksymalna liczność antyłańcucha wynosi n, to zbiór A można podzielić na n rozłącznych łańcuchów.

Wniosek 1 . *Niech* $(A, \leqslant)$ *będzie zbiorem częściowo uporządkowanym mającym* $mn+1$ *elementów. Albo istnieje antyłańcuch składający się z* $m+1$ *elementów, albo łańcuch składający się z* $n+1$ *elementów.*

D o w ó d. Przypuśćmy, że maksymalna długość łańcucha $k \leqslant n$. Wtedy A da się podzielić na k rozłącznych antyłańcuchów. Gdyby każdy antyłańcuch miał nie więcej niż m elementów, to $|A| \leqslant mk \leqslant mn$, sprzeczność. □