Maciej Grzesiak
Instytut Matematyki Politechniki Poznańskiej

Wektory

1. Wektory na płaszczyźnie

Wektor to uporządkowana para punktów, z których pierwszy nazywa się początkiem, a drugi końcem wektora. Jeżeli wprowadzimy prostokątny układ współrzędnych, to można określić współrzędne wektora $\vec{a}$ jako miary rzutów a_x, a_y tego wektora na osie Ox i Oy. Oznaczamy $\overrightarrow{AB} = \vec{a} = [a_x, a_y]$.
W tym opisie nie ma informacji o punktach, które wyznaczają wektor. Ale kierunek, zwrot i długość są określone. Mówimy,że $\vec{a} = [a_x, a_y]$ jest *wektorem swobodnym*, bo nie ma punktu zaczepienia. Inaczej, wektor swobodny to zbiór wszystkich wektorów mających ten sam kierunek, zwrot i długość.
Jeżeli $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, to $a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$.
Zauważmy, że gdy $\vec{i}$, $\vec{j}$ oznaczają wektory jednostkowe na osiach, to

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}.$$

Długość wektora wynosi

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Wektory o długości 1 nazywamy wersorami.
Natomiast kątem między wektorami leżącymi na półprostych l_1 i l_2 nazywamy ten z dwóch kątów utworzonych przez te półproste, którego miara spełnia nierówność $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.
Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ określamy jako

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi.$$

Iloczyn $\vec{a} \circ \vec{a}$ nazywamy kwadratem skalarnym wektora i oznaczamy $\vec{a}^2$. Zatem

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2,$$

czyli kwadrat skalarny jest równy kwadratowi długości wektora.
Przykład. Obliczyć $|2\vec{a} + \vec{b}|$, gdy $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$, a $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/3$.
Bezpośrednio z definicji iloczynu skalarnego mamy, że $\vec{i} \circ \vec{i} = \vec{j} \circ \vec{j} = 1$ oraz $\vec{i} \circ \vec{j} = 0$. Stąd otrzymujemy

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y.$$

Zatem $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = a_x b_x + a_y b_y$, więc

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Przykład. Dane są punkty $A = (1, 1)$, $B = (3, 3)$, $C = (5, 1)$. Obliczyć współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, ich długości, i kąty między nimi.

2. Wektory w przestrzeni

Wszystkie pojęcia nie wymagające układu współrzędnych definiuje się tak jak na płaszczyźnie.
Niech $Oxyz$ będzie prostokątnym układem współrzędnych w przestrzeni, a $\vec{i}$, $\vec{j}$ $\vec{k}$ oznaczają wektory jednostkowe na osiach. Wektor $\overrightarrow{AB}$ o początku $A = (x_1, y_1, z_1)$ i końcu $B = (x_2, y_2, z_2)$, ma współrzędne $a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$, $a_z = z_2 - z_1$. Piszemy:

$$\overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1].$$

Długość wektora wynosi

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Jeżeli przez α, β, γ oznaczymy kąty, jakie wektor $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$ tworzy z osiami układu, to

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Stąd

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Zatem wektor $\vec{l} = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$ jest wersorem. Ponadto $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{l}$.
Liczby $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ nazywamy kosinusami kierunkowymi wektora $\vec{a}$. Kosinusy kierunkowe wektora $\vec{a}$ są więc współrzędnymi wersora zgodnie równoległego do wektora $\vec{a}$.
Przykłady. 1. Wektor o początku $A = (-4, 2, 3)$ ma długość 14 i kosinusy kierunkowe $\frac{2}{7}$, $-\frac{3}{7}$, $\frac{6}{7}$. Obliczyć współrzędne końca wektora B.
2. Obliczyć współrzędne punktu M wiedząc, że jego promień wodzący ma długość 8 i tworzy z osią Ox kąt $\frac{\pi}{4}$, a z osią Oy kąt $\frac{\pi}{3}$.
Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w przestrzeni określamy tak jak na płaszczyźnie, tj. $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$. Ponieważ $\vec{i} \circ \vec{i} = \vec{j} \circ \vec{j} = \vec{k} \circ \vec{k} = 1$ oraz $\vec{i} \circ \vec{j} = \vec{i} \circ \vec{k} = \vec{j} \circ \vec{k} = 0$, więc

$$\begin{aligned} \vec{a} \circ \vec{b} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \circ (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \end{aligned}$$

Podobnie jak dla wektorów na płaszczyźnie otrzymujemy wzór na kąt między wektorami:

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \tag{1}$$

Przykład. Znaleźć kąty wewnętrzne trójkąta o wierzchołkach $A = (2, -1, 3)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (0, 0, 5)$.

3. Iloczyn wektorowy

Definicja 1. *Iloczynem wektorowym niezerowych wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$ tworzących kąt φ nazywamy wektor $\vec{c}$ taki, że*

1. *długość $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$;*
2. *$\vec{c} \perp \vec{a}$ i $\vec{c} \perp \vec{b}$;*
3. *zwrot wektora $\vec{c}$ jest taki, że wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tworzą układ zgodnie skrętny z układem $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.*

Jeżeli $\vec{a} = \vec{0}$ lub $\vec{b} = \vec{0}$, to przyjmujemy $\vec{c} = \vec{0}$.

Piszemy $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Twierdzenie 1. *Iloczyn wektorowy ma własności:*

1. *$|\vec{a} \times \vec{b}|$ jest polem równoległoboku wyznaczonego przez wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$;*
2. *$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$;*
3. *$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$, $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$.*
4. *$(m\vec{a}) \times \vec{b} = m(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (m\vec{b})$;*
5. *$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.*

Wyliczymy współrzędne wektora $\vec{a} \times \vec{b}$. Niech $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$. Wtedy

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = \\
&= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Przykłady. 1. Znaleźć wektor jednostkowy prostopadły do wektorów $\vec{a} = [2, 3, -1]$, $\vec{b} = [1, 2, -3]$.
2. Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A = (1, -2, 8)$, $B = (0, 0, 4)$, $C = (6, 2, 0)$. Następnie wyznaczyć długość wysokości h_B z wierzchołka B.
(odp.: $P = 7\sqrt{5}$, $h_B = \frac{2}{3}\sqrt{21}$.)

3.1. Iloczyn mieszany wektorów

Definicja 2. *Iloczynem mieszanym trzech wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ nazywamy liczbę*

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}.$$

Zatem

$$
\begin{aligned}
(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) &= c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Jeżeli wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ nie są równoległe do jednej płaszczyzny, to wyznaczają równoległościan w przestrzeni. Jego podstawa ma pole $|\vec{a} \times \vec{b}|$, a wysokość $h = |\vec{c}| \cos\varphi$, gdzie φ jest kątem między $\vec{c}$ i $\vec{a} \times \vec{b}$. Zatem objętość wynosi:

$$V = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos\varphi = (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} = (\vec{a}\vec{b}\vec{c}).$$

Ściślej, ponieważ powyższe rozumowanie milcząco zakłada, że $\cos\varphi > 0$, powinniśmy wziąć wartość bezwzględną.

$$V = |(\vec{a}\vec{b}\vec{c})|.$$

Wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ nierównoległe do jednej płaszczyzny wyznaczają także czworościan. Jego objętość wynosi:

$$V = \frac{1}{6}|(\vec{a}\vec{b}\vec{c})|.$$

Przykłady. 1. Obliczyć objętość i pole powierzchni całkowitej równoległościanu zbudowanego na wektorach $\vec{a} = [1, 0, 0]$, $\vec{b} = [1, 1, 2]$, $\vec{c} = [2, 1, 0]$.
2. Dane są trzy wierzchołki czworościanu $A = (4, 0, -2)$, $B = (6, -2, 2)$, $C = (4, -4, 6)$. Wyznaczyć czwarty wierzchołek D wiedząc, że D leży na osi Oy a objętość czworościanu jest równa 40.

4. Wzajemne położenie wektorów

Wektory (niezerowe) $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są *ortogonalne* (prostopadłe), gdy $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$.
Wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są *kolinearne* (równoległe), gdy $\vec{a} \times \vec{b} = 0$. Jest to równoważne warunkowi, że ich współrzędne są proporcjonalne, tzn.

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Jeszcze inaczej: istnieje taka liczba $t \neq 0$, że $\vec{a} = t\vec{b}$.
Trzy wektory niezerowe $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ są *komplanarne* (tzn. leżą w jednej płaszczyźnie), gdy iloczyn mieszany $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = 0$.