Maciej Grzesiak
Instytut Matematyki Politechniki Poznańskiej

Równania różniczkowe

11.05.2018

1. Równanie różniczkowe pierwszego rzędu

Wiele zagadnień geometrycznych, fizycznych, ekonomicznych i innych prowadzi do zależności, w których pojawiają się pochodne.
Przykład. Znaleźć krzywą dla której odcinek stycznej zawarty między osiami układu współrzędnych dzieli się na równe części w punkcie styczności.
Jeżeli punkt styczności ma współrzędne (x, y), to odpowiednia styczna musi przecinać oś Ox w punkcie $(2x, 0)$, a oś Oy w punkcie $(0, 2y)$. Zatem

$$\frac{2y}{2x} = \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,$$

gdzie α jest kątem nachylenia stycznej do osi Ox, a więc $\operatorname{tg}\alpha = y'$. Wynika stąd, że szukana funkcja spełnia równanie

$$y = -xy',$$

w którym niewiadomą jest funkcja.
Przykład. Prędkość rozpadu pierwiastka promieniotwórczego jest ujemna i proporcjonalna do aktualnej masy substancji. Współczynnik proporcjonalności k dla danej substancji jest stały i nie zależy od czasu. Wyznaczyć zależność masy od czasu.
Jeżeli $m(t)$ oznacza masę w chwili t, to opisane empiryczne własności prowadzą do zależności:

$$m'(t) = -km(t).$$

Aby odpowiedzieć na pytanie należy z tej równości wyznaczyć funkcję $m(t)$.
Równania, które pojawiły się w przykładach nazywamy równaniami różniczkowymi. Dokładniej

Definicja 1. *Równaniem różniczkowym zwyczajnym pierwszego rzędu nazywamy równanie postaci*

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

czyli pewien związek między argumentem x, wartością funkcji y i jej pochodną y'.

Jest to postać uwikłana równania. Jeżeli można tę postać rozwikłać, tj. otrzymać

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

to mówimy, że równanie jest w *postaci normalnej.* Traktując pochodną jako iloraz różniczek: $y' = \frac{dy}{dx}$ możemy napisać

$$dy - f(x, y)dx = 0,$$

lub ogólniej:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \tag{3}$$

Mówimy wtedy o tzw. *formie różniczkowej równania różniczkowego.*
Z przykładów widać, w jakiego typu zagadnieniach można spodziewać się równań różniczkowych; mianowicie tam, gdzie pojawia się styczna (bądź kąt nachylenia) lub prędkość (szeroko rozumiana).

Definicja 2. Rozwiązaniem *równania różniczkowego (1) na przedziale* (a,b) *nazywamy funkcję różniczkowalną* $y(x)$ *taką, że*

$$F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0,$$

dla $x \in (a,b)$*. Wykres rozwiązania równania różniczkowego nazywamy jego* krzywą całkową.

Rozwiązanie równania nie jest na ogół określone jednoznacznie. Np. dla równania z przykładu 1 rozwiązaniami są funkcje postaci $y = C/x$, gdzie C jest dowolną stałą; podobnie dla równania z przykładu 2: funkcje postaci $m(t) = Ce^{-kt}$. Nie jest to dziwne, gdy uświadomimy sobie, że znalezienie funkcji, gdy dana jest jej pochodna, to problem wyznaczenia funkcji pierwotnej (lub całki). Dlatego też rozwiązywanie równania nazywa sie często całkowaniem, a samo rozwiązanie (zwłaszcza gdy jest w postaci uwikłanej) — całką.

Definicja 3. *Rozwiązanie równania różniczkowego (1) postaci* $y = f(x, C)$ *(tzn. zawierające stałą dowolną) nazywamy rozwiązaniem ogólnym (bądź całką ogólną). Jeśli stałej* C *nadamy konkretną wartość liczbową, to otrzymane rozwiązanie nazywamy szczególnym (całką szczególną).*

Wybór stałej na ogół określony jest założeniami problemu.

Definicja 4. *Równanie różniczkowe* $y' = f(x, y)$ *oraz warunek*

$$y(x_0) = y_0$$

nazywamy zagadnieniem początkowym lub zagadnieniem Cauchy'ego.

Sam warunek nazywamy warunkiem początkowym.
Sens geometryczny jest taki, że ze zbioru wszystkich krzywych całkowych wybieramy tę, która przechodzi przez zadany punkt (x_0, y_0) na płaszczyźnie.
Jeżeli problem prowadzący do równania różniczkowego ma źródło fizyczne, geometryczne czy np. biologiczne, to na ogół będzie wiadomo (zdroworozsądkowo), czy rozwiązanie istnieje, i ciężar przeniesie się na jego znalezienie. Matematyk jednak zobowiązany jest do przedstawienia warunków istnienia rozwiązania.

Twierdzenie 1. (istnienie i jednoznaczność rozwiązania) *Jeżeli funkcja* $f(x, y)$ *oraz jej pochodna cząstkowa* $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ *są ciągłe na obszarze* $D \subset \mathbb{R}^2$ *oraz* $(x_0, y_0) \in D$*, to zagadnienie początkowe*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Przykład. 1. Sprawdzić, czy dana funkcja jest rozwiązaniem danego równania.
a) $y = 0$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = x^2$; $y' = 1 + y^2$.
b) $y = 0$, $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{1}{x^2+1}$; $y' = -2xy^2$.
c) $y = \frac{C^2 - x^2}{2x}$; $x + y + xy' = 0$.
d) $x^2 - xy + y^2 = c^2$; $(x - 2y)y' = 2x - y$.
Przykład. 2. Znane są całki ogólne pewnych równań różniczkowych. Znaleźć całki szczególne spełniające dane warunki początkowe.
a) $x^3 y + \cos x = C$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.
b) $y = \ln(C - x^2)$, $y(0) = 1$.
Całka ogólna jest (geometrycznie) rodziną krzywych: każdej wartości stałej C odpowiada jedna krzywa. Odwrotnie, gdy określona jest pewna rodzina krzywych, to jest ona całką ogólną pewnego równania różniczkowego.
Przykład. 3. Znaleźć równanie różniczkowe rodziny krzywych:
a) $y = \frac{C^2 - x^2}{2x}$.
b) $y = C(x^2 - y^2)$.
Rozwiązanie a). Ponieważ $y = \frac{C^2 - x^2}{2x}$, więc $2xy = C^2 - x^2$. Różniczkując tę równość względem x otrzymujemy $2y + 2xy' = -2x$, a więc $xy' + y + x = 0$.

2. Równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

Definicja 5. *Równanie różniczkowe, które można zapisać w postaci*

$$y' = g(x)h(y)$$

nazywamy równaniem o zmiennych rozdzielonych.

Forma różniczkowa tego równania to

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx.$$

Aby takie równanie rozwiązać całkujemy obustronnie jego formę różniczkową. Stałą całkowania dopisujemy tylko po jednej stronie równania.
Przykład. Rozwiązać równanie $y' = xy$.

$$\frac{dy}{dx} = xy,$$

$$\frac{dy}{y} = xdx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int xdx,$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C,$$

$$y = \pm e^{\frac{1}{2}x^2 + C} = \pm e^C e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

Przyjmując $C_1 = \pm e^C$ otrzymujemy odpowiedź:

$$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

Przykład. Rozwiązać równanie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x y}{1 + e^x}.$$

Przykład. Znaleźć rozwiązanie szczególne równania $y' \sin x - y \ln y = 0$ z warunkiem początkowym $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.
(odp.: ROR: $\ln y = C \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, RSR: $y = 1$)
Również równania wyprowadzone na początku:

$$y = -xy',$$

$$m'(t) = -km(t),$$

są równaniami o zmiennych rozdzielonych.

2.1. Równanie logistyczne

Niech dana będzie pewna populacja (np. myszy, wróbli, bakterii,...). Im większa jest jej obecna liczebność, tym więcej rodzi się nowych osobników; ale z drugiej strony rozwój populacji napotyka na barierę w postaci ograniczonych zasobów środowiska.
Załóżmy ogólniej, że $N(t)$ jest liczebnością populacji w chwili t, i że tempo (prędkość) jej rozwoju jest funkcją N, tj.

$$\frac{dN}{dt} = f(N),$$

gdzie $f(N)$ jest pewną funkcją. Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych.

Gdyby zasoby były nieograniczone, to należałoby przyjąć $f(N) = kN$ ($k > 0$ — współczynnik proporcjonalności). Zatem

$$\frac{dN}{dt} = kN,$$

i rozwiązanie tego równania jest postaci

$$N(t) = N_0 e^{kt},$$

gdzie N_0 jest stanem populacji w momencie $t = 0$. Wzrost populacji jest wtedy wykładniczy. Ale jeśli założymy, że tempo rozwoju jest proporcjonalne nie tylko do aktualnej liczebności, ale również do wielkości dostępnych jeszcze zasobów, to należy przyjąć

$$f(N) = kN(a - N),$$

gdzie a oznacza maksymalną liczebność możliwą do osiągnięcia w danym środowisku. Równanie

$$\frac{dN}{dt} = kN(a - N), \quad a, k > 0,$$

nazywamy *równaniem logistycznym*. Jego rozwiązanie jest postaci

$$N(t) = \frac{a}{1 + (\frac{a}{N_0} - 1)e^{-akt}}, \quad \text{gdzie } N_0 = N(0).$$

Wykres tej funkcji nazywamy *krzywą logistyczną*. Jak widać, $\lim_{t\to\infty} N(t) = a$.
Przykład. Przypuśćmy, że student zarażony grypą wraca do kampusu, w którym mieszka 1000 studentów. Załóżmy, że prędkość rozprzestrzeniania się wirusa jest proporcjonalna do liczby N już zarażonych, ale także do liczby $1000 - N$ zdrowych (możliwych do zarażenia). Zaobserwowano, że po 4 dniach chorowało 50 studentów. Ilu będzie chorych po 6 dniach?
Mamy tu równanie logistyczne

$$\frac{dN}{dt} = kN(1000 - N), \quad k > 0,\ N(0) = 1.$$

Zatem

$$N(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-1000kt}}.$$

Ponieważ $N(4) = 50$, więc k można wyznaczyć z równości

$$50 = \frac{1000}{1 + 999e^{-4000k}},$$

skąd

$$k = \frac{-1}{4000} \ln 19999 = -0,0009906,$$

$$N(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0,9906t}},$$

i otrzymujemy odpowiedź

$$N(6) = \frac{1000}{1 + 999e^{-5,9436}} = 276.$$

Po 6 dniach będzie chorować 276 studentów.
Wykonując dalsze rachunki otrzymamy

t (dni)	N (liczba chorych)
4	50
5	124
6	276
7	507
8	735
9	882
10	953

2.2. Równania sprowadzalne do równania o zmiennych rozdzielonych

Równanie postaci

$$y' = f(ax + by + c)$$

sprowadzamy do zmiennych rozdzielonych przy pomocy podstawienia $u = ax+by+c$; wtedy $u' = a + by'$, czyli $y' = \frac{1}{b}(u' - a)$.
Przykłady. 1. $y' = (x+y)^2 + 2(x+y)$;
2. $y' = \frac{1-x-y}{x+y}$.
Równanie postaci

$$y' = f(\frac{y}{x})$$

nazywamy *jednorodnym* i sprowadzamy do zmiennych rozdzielonych przy pomocy podstawienia $u = \frac{y}{x}$; wtedy $y = ux$, czyli $y' = u'x + u$.
Przykłady. 1. $y' = \frac{y}{x}(1 + \ln\frac{y}{x})$;
2. $y' = \frac{xy+y^2}{x^2}$;
3. $y' = \frac{y(x-y)}{x(x+y)}$.

3. Równanie różniczkowe liniowe

Definicja 6. *Równanie różniczkowe postaci*

$$y' + p(x)y = q(x)$$

gdzie $p(x)$, $q(x)$ są pewnymi funkcjami, nazywamy równaniem liniowym. Jeżeli $q(x) = 0$, to równanie nazywamy liniowym jednorodnym.

Zauważmy, że równanie liniowe jednorodne jest równaniem o zmiennych rozdzielonych.
Ogólne (niejednorodne) równanie liniowe rozwiązujemy w dwóch etapach. Najpierw rozwiązujemy równanie jednorodne

$$y' + p(x)y = 0,$$

a następnie szukamy warunków jakie musiałaby spełniać stała C aby już znaleziona funkcja $y = f(x, C)$ (RORJ) spełniała także równanie niejednorodne. W tym celu stałą traktujemy jak funkcję: $C = C(x)$, czyli ją *uzmienniamy*; podstawiając funkcję $y = f(x, C(x))$ do równania niejednorodnego otrzymujemy równanie różniczkowe z niewiadomą C, i po jego rozwiązaniu podstawiamy wynik do funkcji $f(x, C(x))$. Opisana metoda nazywa się *metodą uzmiennienia stałej.*
Przykłady. 1. $y' + \frac{y}{x+1} = x^2$
2. $y' + y\operatorname{tg} x = \sin^2 x$.
Patrząc na wynik końcowy można zauważyć, że

$$\text{RORNJ} = \text{RORJ} + \text{RSRNJ},$$

gdzie RSRNJ oznacza pewne rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego. Nasuwa to myśl, że po rozwiązaniu równania jednorodnego wystarczy dodać jakieś znane rozwiązanie szczególne. W niektórych przypadkach takie RS jest łatwo wyznaczyć. Jeśli funkcja $p(x)$ jest stała, tj. mamy równanie

$$y' + py = q(x)$$

w którym prawa strona równania $q(x)$ jest wielomianem, funkcją wykładniczą, sinusem, cosinusem bądź pewnymi kombinacjami wymienionych, to okazuje się, że istnieje RS też tej postaci (ale z innymi współczynnikami!). Zatem przewidujemy RS z pewnymi ogólnymi współczynnikami; podstawiamy do równania i wyznaczamy te współczynniki. Mówimy, że RS jest wyznaczone *metodą przewidywania.*

Tabela przewidywania (nie wyczerpuje wszystkich przypadków)

Prawa strona $q(x)$ (a, b, c, d, k, ω — stałe znane)	Przewidywane RSRN (A, B, C, D — stałe nieznane)
ae^{kx}	Ae^{kx}
$a\sin\omega x + b\cos\omega x$	$A\sin\omega x + B\cos\omega x$
$a,\ a+bx,\ a+bx+cx^2, \ldots$	$A,\ A+Bx,\ A+Bx+Cx^2, \ldots$
$e^{kx}(a\sin\omega x + b\cos\omega x)$	$e^{kx}(A\sin\omega x + B\cos\omega x)$
$(a+bx)e^{kx}$	$(A+Bx)e^{kx}$
$(a+bx)\sin\omega x + (cx+d)\cos\omega x$	$(A+Bx)\sin\omega x + (Cx+D)\cos\omega x$

Uwaga: jeśli $k = -p$, to przewidywaną funkcję należy zmodyfikować mnożąc przez x (bo wtedy funkcja e^{kx} jest rozwiązaniem równania jednorodnego).
Przykłady. 1. $\frac{dy}{dx} + y = x^3$.
Równanie jednorodne $\frac{dy}{dx} + y = 0$ ma rozwiązanie $y = Ce^{-x}$.
Przewidujemy RS w postaci $y_s = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Podstawiamy do równania i otrzymujemy $y_s = x^3 - 3x^2 + 6x - 6$. Zatem RORNJ wynosi

$$y = Ce^{-x} + x^3 - 3x^2 + 6x - 6.$$

2. $y' + y = x^2 e^x$.
Równanie jednorodne $\frac{dy}{dx} + y = 0$ ma rozwiązanie $y = Ce^{-x}$.
Przewidujemy RS w postaci $y_s = (Ax^2+Bx+C)e^x$. Podstawiamy do równania i otrzymujemy $y_s = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4})e^x$. Zatem RORNJ wynosi

$$y = Ce^{-x} + (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4})e^x.$$

3. $y' - y = 2x\cos x$. Równanie jednorodne $\frac{dy}{dx} - y = 0$ ma rozwiązanie $y = Ce^x$.
Przewidujemy RS w postaci $y_s = (Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x$. Podstawiamy do równania i otrzymujemy $y_s = -x\cos x + (x+1)\sin x$. Zatem RORNJ wynosi

$$y = Ce^x + -x\cos x + (x+1)\sin x.$$

Można też wyprowadzić ogólny wzór na rozwiązanie równania liniowego:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + Ce^{-\int p(x)dx}. \tag{4}$$

W przypadku gdy $p(x) = p =$const mamy:

$$y = e^{-px} \int e^{px} q(x)dx + Ce^{-px}. \tag{5}$$

Uwaga: przy obliczaniu całek nie uwzględniamy stałych całkowania.

3.1. Obwód elektryczny

W obwodzie połączono szeregowo opornik $R[\Omega]$, cewkę o indukcyjności L[H] oraz zewnętrzną siłę elektromotoryczną $E(t)$[V]. Wyznaczyć natężenie $i(t)$ prądu.

Spadek napięcia na oporniku wynosi:

$$U_R = Ri.$$

Spadek napięcia na cewce wynosi:

$$U_L = L \cdot \frac{di}{dt}.$$

Z II prawa Kirchhoffa otrzymujemy:

$$L \cdot \frac{di}{dt} + Ri = E(t).$$

Stąd ze wzoru 5 (uwaga: $p = \frac{R}{L}$, $q(t) = \frac{1}{L}E(t)$):

$$i(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \int E(t) e^{\frac{R}{L}t} dt + Ce^{-\frac{R}{L}t},$$

lub

$$i(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\big(i_0 + \frac{1}{L}\int E(t)e^{\frac{R}{L}t}dt\big).$$

gdzie $i(0) = i_0$.

Przykład. Napisać równanie różniczkowe dla obwodu z oporem R, indukcyjnością L i SEM:
a) $E(t) = E_0$;
b) $E(t) = E_0 \sin \omega t$.
Wyznaczyć $i(t)$ jeśli $i(0) = 0$.
Odp. a) $i(t) = \frac{E_0}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$; gdy $t \to \infty$, $i = \frac{E_0}{R}$.
b) $i(t) = \frac{E_0}{R^2+\omega^2 L^2}[R \sin t - \omega L \cos t + \omega L e^{-\frac{R}{L}t}]$.

4. Równanie Bernoullego

Definicja 7. *Równanie różniczkowe postaci*

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \tag{6}$$

gdzie $n \neq 0$, $n \neq 1$ oraz $p(x)$, $q(x)$ są pewnymi funkcjami, nazywamy równaniem Bernoullego.

Zauważmy, że dla $n = 0$ mamy równanie liniowe, a dla $n = 1$ równanie (6) jest równaniem o zmiennych rozdzielonych.
Równanie Bernoullego rozwiązujemy stosując podstawienie sprowadzające je do równania liniowego. Zauważmy bowiem, że mnożąc równanie (6) przez y^{-n} mamy:

$$y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x),$$

i jeśli podstawimy $u = y^{1-n}$, to $u' = (1-n)y^{-n}y'$, czyli

$$\frac{1}{1-n}u' + p(x)u = q(x).$$

Przykłady. 1. $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$
Odp. $y = \frac{(x^2+C)^2}{4e^{2x^2}}$;
2. $y' - 9x^2y + 3(x^5 - x^2)\sqrt[3]{y^2} = 0$
Odp. $y = (\frac{1}{3}x^3 + Ce^{x^3})^3$.

5. Równanie zupełne

Równanie w formie różniczkowej

$$ydx + xdy = 0$$

jest oczywiście równaniem o zmiennych rozdzielonych (a także równaniem liniowym). Można jednak zauważyć, że jeśli $z = xy$, to $dz = ydx + xdy$; zatem lewa strona równania jest różniczką zupełną funkcji $z = xy$. Stąd $d(xy) = 0$, czyli $xy = C$ jest ROR.

Definicja 8. *Równanie w formie różniczkowej*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

nazywamy równaniem zupełnym w obszarze D płaszczyzny Oxy jeśli jego lewa strona jest różniczką zupełną w tym obszarze.

Twierdzenie 2. *Niech $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ będą funkcjami ciągłymi i mającymi pierwsze pochodne cząstkowe w obszarze D płaszczyzny Oxy. Wyrażenie różniczkowe*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

jest różniczką zupełną wtedy, i tylko wtedy gdy

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

w obszarze D.

METODA ROZWIĄZYWANIA RÓWNANIA ZUPEŁNEGO
Mając dane równanie

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

najpierw sprawdzamy, czy

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Następnie zakładamy, że

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y),$$

i całkując tę równość względem x (y traktujemy jak stałą) otrzymujemy

$$F(x,y) = \int P(x,y)dx + g(y), \tag{7}$$

gdzie dowolna funkcja $g(y)$ pełni rolę stałej całkowania. Teraz różniczkujemy równość (7) względem y. Obliczone $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$ musi być równe $Q(x,y)$. Otrzymujemy więc równość

$$\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx + g'(y) = Q(x,y),$$

czyli

$$g'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx. \tag{8}$$

Prawa strona ostatniej równości nie zależy od x. Całkując teraz względem y i podstawiając do (7) otrzymujemy $F(x,y)$. Ale to nie jest rozwiązanie równania, tylko funkcja pierwotna jego lewej strony. Równanie można teraz zapisać w postaci

$$\mathrm{d}F(x,y) = 0,$$

a więc rozwiązanie y (w postaci uwikłanej) jest dane równością

$$F(x,y) = C$$

Przykłady. 1. $(\sin y - y\sin x)dx + (x\cos y + \cos x)dy = 0$;
2.* $\frac{1}{y} + \left[\frac{e^y(y-1)-x}{y^2}\right]y' = 0$, $y(0) = 1$;
Rozw.:

$$P(x,y) = \frac{1}{y}, \quad \text{więc } F(x,y) = \frac{x}{y} + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -\frac{x^2}{y} + \frac{e^y(y-1)}{y^2}, \quad \text{więc } \varphi'(y) = \frac{e^y(y-1)}{y^2}$$

$$\varphi(y) = \int \frac{e^y(y-1)}{y^2} dy = \left\{u = e^y(y-1),\ dv = \frac{dy}{y^2}\right\} = \frac{e^y}{y},$$

$$F(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{e^y}{y}$$

Postać uwikłana rozwiązania:

$$\frac{x}{y} + \frac{e^y}{y} = C$$

Podstawiamy $x = 0$, $y = 1$, skąd $C = e$, czyli $\frac{x}{y} + \frac{e^y}{y} = e$.
Odp: $x + e^y = ey$.
3. $(x^3 + xy^2 + x^2)dx + x^2ydy = 0$;
4. $e^{x-y}(x+1)dx + (y - xe^{x-y})dy = 0$

6. Równania różniczkowe rzędu drugiego

Definicja 9. *Równaniem różniczkowym zwyczajnym drugiego rzędu nazywamy równanie postaci*

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{9}$$

czyli pewien związek między argumentem x, wartością funkcji y i jej pochodnymi y', y''.

Definicja 10. *Rozwiązaniem równania różniczkowego (9) na przedziale (a,b) nazywamy funkcję różniczkowalną $y(x)$ taką, że*

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x)) \equiv 0,$$

dla $x \in (a,b)$.

Podobnie jak dla równania rzędu I rozwiązanie nie jest określone jednoznacznie. Rozwiązanie ogólne zależy od dwóch stałych dowolnych. Stałe te możemy wyznaczyć dysponując dodatkowymi warunkami. Mamy dwa typy warunków:
1. warunki początkowe: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$;
2. warunki brzegowe: $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$.
Problem wyznaczenia rozwiązania, gdy dane są warunki początkowe nazywamy zagadnieniem początkowym lub zagadnieniem Cauchy'ego. Podobnie jak dla równania rzędu I ma on (przy pewnych "rozsądnych" założeniach) jednoznaczne rozwiązanie. Gorzej jest z warunkami brzegowymi — tutaj rozwiązanie istnieje dość rzadko. Dlatego też ten typ warunków jest zdecydowanie rzadziej rozważany.

6.1. Równania rzędu II sprowadzalne do równań rzędu I

Równanie typu $F(x, y', y'') = 0$ (nie zawiera y w sposób jawny)
Podstawiając $y' = u(x)$ otrzymujemy równanie $F(x, u, u') = 0$.
Przykład. Znaleźć RS równania

$$xy'' + y' + x = 0, \quad y(1) = -\frac{1}{4},\ y'(1) = -\frac{1}{2}.$$

Po podstawieniu mamy:

$$xu' + u + x = 0.$$

To równanie można rozwiązywać na kilka sposobów: jako jednorodne, jako liniowe niejednorodne, bądź (nietypowo) zapisując je w postaci

$$(ux)' = -x,$$

i całkując tę równość. ROR jest postaci

$$ux = C_1 - \frac{x^2}{2}.$$

Ponieważ $u(1) = y'(1) = -\frac{1}{2}$, więc $C_1 = 0$, czyli $u = -\frac{x}{2}$. Zatem

$$y' = -\frac{x}{2}.$$

Całkując powtórnie otrzymujemy

$$y = -\frac{x^2}{4} + C_2.$$

Podstawiając $x = 1$ i $y = -\frac{1}{4}$ znajdujemy $C_2 = 0$. Wynik końcowy:

$$y = -\frac{1}{4}x^2.$$

Przykłady.
1. $xy'' = y'$, odp.: $y = \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2$;
2. $x^2y'' + xy' = 1$, odp.: $y = \frac{1}{2}\ln^2|x| + C_1\ln|x| + C_2$.

Równanie typu $F(y, y', y'') = 0$ (nie zawiera x w sposób jawny)
Jeśli w równaniu nie występuje jawnie x, to podstawiamy $y' = u(y)$. Pochodną y'' obliczamy jako pochodną funkcji złożonej:

$$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(y) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u'(y)y' = u'u.$$

Otrzymujemy równanie $F(y, u, u'u) = 0$.
Przykład. Znaleźć RS równania

$$y'' = 2yy', \quad y(1) = -1,\ y'(1) = 1.$$

Odp. $y = -1/x$.
Przykład. (trudniejszy). Znaleźć RS równania

$$yy'' - y'^2 = y^4, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Po podstawieniu mamy:

$$yuu' - u^2 = y^4. \tag{10}$$

Jest to równanie Bernoullego (argumentem jest y). Podstawiamy $u^2 = z$, i otrzymujemy

$$z' - \frac{2z}{y} = 2y^3,$$

którego RO jest postaci $z = (y^2 + C_1)y^2$. Stąd mamy rozwiązanie równania (10)

$$u = \pm y\sqrt{C_1 + y^2}.$$

Ponieważ $u(0) = y'(0) = 0$ oraz $y(0) = 1$, więc podstawiając $y = 1$, $u = 0$ dostajemy $C_1 = -1$, czyli $u = \pm y\sqrt{y^2 - 1}$. Zatem

$$y' = \pm y\sqrt{y^2 - 1},$$

czyli

$$\frac{dy}{y\sqrt{y^2 - 1}} = \pm dx.$$

Całkując otrzymujemy

$$\arccos\frac{1}{y} \pm x = C_2.$$

Podstawiając $x = 0$ i $y = 1$ znajdujemy $C_2 = 0$. Stąd $\frac{1}{y} = \cos x$. Wynik końcowy:

$$y = \frac{1}{\cos x}.$$

Przykład. $yy'' = (y')^2$, odp.: $y = C_2 e^{C_1 x}$.
Równanie typu $F(x, y, y', y'') = 0$, gdy F jest jednorodną funkcją zmiennych y, y', y''
Jednorodność oznacza, że wszystkie wyrazy "są tego samego stopnia" ze względu na y, y', y''.
Przykładami takich równań są $y^2 + y'^2 - 2yy' = 0$, $xy^2 + y'^2 - 2yy' \ln x = 0$.
Dokonujemy najpierw podstawienia $y = e^u$, gdzie $u = u(x)$. Wtedy

$$y = e^u, \quad y' = e^u u', \quad y'' = e^u u'' + e^u (u')^2.$$

Otrzymane równanie jest nadal rzędu II, ale można je podzielić przez odpowiednią (wspólną dla wszystkich wyrazów) potęgę e^u i otrzymać równanie typu pierwszego (nie zawierające funkcji u).
Przykład. $yy'' - (y')^2 = 0$ (odp.: $y = C_2\, \mathrm{e}^{C_1 x}$).

6.2. Równania liniowe drugiego rzędu

Definicja 11. *Równanie postaci*

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \tag{11}$$

nazywamy równaniem liniowym drugiego rzędu. Jeżeli $f(x) = 0$, to równanie nazywamy liniowym jednorodnym.

Twierdzenie 3. (istnienie i jednoznaczność rozwiązania) *Jeżeli funkcje $a(x)$, $b(x)$ i $f(x)$ są ciągłe na przedziale (a, b), $x_0 \in (a, b)$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$, to zagadnienie początkowe*

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x), \quad y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1 \tag{12}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie na przedziale (a, b).

Geometrycznie oznacza to, że przez każdy punkt pasa $(a, b) \times \mathbb{R}$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa równania o zadanym współczynniku kierunkowym stycznej.

6.3. Równania liniowe jednorodne

Twierdzenie 4. *Jeżeli funkcje $y_1(x)$, $y_2(x)$ są rozwiązaniami równania liniowego jednorodnego (w skrócie: RLJ)*

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0,$$

to dla dowolnych liczb rzeczywistych α, β funkcja

$$y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$$

jest także rozwiązaniem tego równania.

Inaczej: kombinacja liniowa rozwiązań RLJ jest także jego rozwiązaniem.
Własność ta nie dotyczy innych typów równań!
Przykład. Rozwiązaniami równania

$$y'' + y = 0$$

są (co łatwo sprawdzić) funkcje

$$y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x.$$

Zatem dla dowolnych α, β funkcja $y = \alpha \cos x + \beta \sin x$ jest rozwiązaniem tego równania.

Widzimy, że mając dwa rozwiązania można utworzyć nieskończenie wiele rozwiązań. Ale czy wszystkie?
Rozwiązaniami powyższego równania są także funkcje

$$y_1 = 2\cos x, \quad y_2 = 5\cos x$$

a z tych funkcji można otrzymać jedynie $y = (2\alpha + 5\beta)\cos x$, co z pewnością nie jest rozwiązaniem ogólnym. Aby z dwóch rozwiązań można było zbudować rozwiązanie ogólne, muszą one spełniać dodatkowy warunek.

Definicja 12. *Mówimy, że rozwiązania $y_1(x)$, $y_2(x)$ równania liniowego jednorodnego określone na (a, b) tworzą układ fundamentalny rozwiązań tego równania na (a, b), jeżeli dla każdego $x \in (a, b)$ spełniony jest warunek*

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Wyznacznik $W(y_1, y_2)$ nazywamy *wrońskianem*[1] pary funkcji $y_1(x)$, $y_2(x)$.
Ponieważ $W(y_1, y_2) = y_2' \cdot y_1 - y_2 \cdot y_1'$, więc

$$\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)' = \frac{W(y_1, y_2)}{y_1^2}$$

a zatem warunek $W(y_1, y_2) \neq 0$ jest równoważny warunkowi

$$\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)' \neq 0,$$

czyli $\frac{y_2(x)}{y_1(x)}$ nie jest stałą.
To z kolei równoważne jest z tym, że kombinacja liniowa

$$y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$$

jest różna od 0 (chyba że $\alpha = \beta = 0$).
Przykład. Wrońskian dla funkcji $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ wynosi 1, a dla funkcji $y_1 = 2\cos x$, $y_2 = 5\cos x$ wynosi 0. W pierwszym przypadku mamy układ fundamentalny, w drugim nie.

Twierdzenie 5. *Niech funkcje $y_1(x)$, $y_2(x)$ tworzą układ fundamentalny rozwiązań równania liniowego jednorodnego. Wtedy każde rozwiązanie $y(x)$ tego równania jest postaci*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

gdzie C_1, C_2 są pewnymi stałymi.

Powyższe twierdzenie oznacza, że dla wyznaczenia RORLJ wystarczy znaleźć funkcje tworzące układ fundamentalny rozwiązań tego równania i utworzyć z nich kombinację liniową (ze stałymi dowolnymi C_1, C_2). Jednak wyznaczenie tych funkcji nie jest na ogół łatwe. Wyjątkiem są równania o stałych współczynnikach, o których będzie mowa dalej.

6.4. Równania liniowe jednorodne o stałych współczynnikach

Rozważmy równanie

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{13}$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Zauważmy, że jeśli funkcja e^{rx} jest rozwiązaniem tego równania, to po podstawianiu do (13) mamy

$$r^2 e^{rx} + are^{rx} + be^{rx} = 0,$$

więc dzieląc przez e^{rx} dostajemy

$$r^2 + ar + b = 0.$$

[1] Józef Maria Hoene-Wroński, 1776–1853

Definicja 13. (równanie charakterystyczne) *Równanie*

$$r^2 + ar + b = 0$$

nazywamy równaniem charakterystycznym równania $y'' + ay' + by = 0$.

Łatwo sprawdzić, że jeśli r jest rozwiązaniem równania charakterystycznego, to e^{rx} jest rozwiązaniem równania jednorodnego. Stąd dalej wynika, że jeśli równanie charakterystyczne ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste r_1, r_2, to tworzą one układ fundamentalny rozwiązań (wrońskian jest różny od 0) i RO jest postaci $y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$. Jeśli pierwiastek r_0 jest podwójny, to $y = e^{r_0x}$ jest rozwiązaniem, a drugie rozwiązanie trzeba znaleźć. Można to zrobić metodą uzmiennienia stałej: podstawiamy $y = C(x)e^{r_0x}$ do równania (13) i otrzymujemy

$$C''e^{r_0x} + 2C'r_0e^{r_0x} + Cr_0^2e^{r_0x} + a(C'e^{r_0x} + Cr_0e^{r_0x}) + bCe^{r_0x} = 0.$$

Dzieląc przez e^{r_0x} i porządkując mamy

$$C'' + C'(2r_0 + a) + C(r_0^2 + ar_0 + b) = 0.$$

Wyrażenia w nawiasach są równe 0 (bo $\Delta = 0$, $r_0 = -\frac{a}{2}$), więc $C'' = 0$, i dwukrotnie całkując otrzymujemy

$$C = C_1x + C_2.$$

Zatem RO wynosi

$$y = (C_1x + C_2)e^{r_0x}.$$

Układ fundamentalny tworzą więc funkcje $y = e^{r_0x}$, $y = xe^{r_0x}$.
Jeśli równanie charakterystyczne ma dwa pierwiastki zespolone $r_1 = \alpha + \beta i, r_2 = \alpha - \beta i$, to rozważamy funkcje zespolone:

$$Y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x}, \quad Y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}.$$

Ze wzoru Eulera $e^{it} = \cos t + i \sin t$, więc

$$Y_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x), \quad Y_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Aby otrzymać funkcje rzeczywiste wyznaczamy część rzeczywistą i urojoną:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Łatwo sprawdzić, że tworzą one układ fundamentalny rozwiązań (wrońskian wynosi $\beta e^{2\alpha x}$ i jest różny od 0).
Wyniki powyższych rozważań podsumujemy w tabeli:

Rozwiązywanie równania liniowego jednorodnego

Pierwiastki r. char.	Układ fundamentalny	Rozwiązanie ogólne
$r_1,\ r_2$	$e^{r_1x},\ e^{r_2x}$	$C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$
r_0	$e^{r_0x},\ xe^{r_0x}$	$C_1e^{r_0x} + C_2xe^{r_0x}$
$\alpha+\beta i,\ \alpha-\beta i$	$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x$	$C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$

Przykład. Rozwiązać równania liniowe jednorodne rzędu 2:
1) $y'' - 5y' + 4y = 0$;
2) $y'' + 4y' + 4y = 0$;
3) $y'' - 4y' + 13y = 0$.

6.5. Równania liniowe niejednorodne o stałych współczynnikach

Rozważmy równanie

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{14}$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.
Jeżeli funkcja $y = C_1y_1 + C_2y_2$ jest RO równania (13) (czyli równania jednorodnego odpowiadającego równaniu (14)), to (podobnie jak dla równania rzędu pierwszego) można potraktować C_1, C_2 jak funkcje i próbować dobrać je tak, by spełniały równanie (14).
Zatem obliczamy pochodną:

$$y' = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x) = C_1'y_1 + C_1y_1' + C_2'y_2 + C_2y_2'.$$

Założymy teraz, że C_1 i C_2 są takimi funkcjami, że $C_1'y_1 + C_2y_2' = 0$. Wtedy pochodna y' upraszcza się do

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2'.$$

Obliczamy drugą pochodną:

$$y'' = C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2'y_2' + C_2y_2''.$$

Teraz podstawiając do równania (14) otrzymujemy

$$C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2'y_2' + C_2y_2'' + a(C_1y_1' + C_2y_2') + b(C_1y_1 + C_2y_2) = f(x).$$

W tym równaniu suma wyrazów zawierających C_1 wynosi 0 (bo $y_1'' + ay_1' + by_1 = 0$), a także (analogicznie) suma wyrazów zawierających C_2 wynosi 0. Zatem równanie upraszcza się do postaci:

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x)$$

Ostatecznie stwierdzamy, że funkcje C_1 i C_2 muszą spełniać układ:

$$\begin{array}{rcl} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) & = & 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) & = & f(x) \end{array}$$

z którego wyznaczamy najpierw algebraicznie pochodne C_1', C_2', a potem (całkując) C_1, C_2.
Tę metodę nazywamy *metodą uzmiennienia stałych*.
Uwaga: trzeba pamiętać, że wzory odnoszą się do przypadku, gdy współczynnik przy y'' wynosi 1; gdyby był inny, należy najpierw równanie podzielić przezeń.

Przykład. Stosując metodę uzmiennienia stałych rozwiązać równania:
1) $y'' + 4y = \frac{1}{\cos x}$
Wsk.: $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln|\operatorname{tg}(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})|$;
odp.: $y = C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x + \cos x - \frac{1}{2} \ln|\operatorname{tg}(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})| \sin 2x$.

2) $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x}$.
odp.: $y = C_3 \,\mathrm{e}^{-x} + C_4x\,\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{12}x^4\,\mathrm{e}^{-x}$.

Podobnie jak dla równania liniowego rzędu I rozwiązanie ogólne jest postaci

$$\text{RORNJ} = \text{RORJ} + \text{RSRNJ},$$

gdzie RSRNJ oznacza pewne rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego. W niektórych przypadkach można przewidywać postać RS równania (14). Zasady są takie same jak dla równania rzędu I. Przypominamy je niżej.
Jeśli prawa strona równania $f(x)$ jest wielomianem, funkcją wykładniczą, sinusem, cosinusem bądź pewnymi kombinacjami wymienionych, to istnieje RS takiej samej postaci. Przewidujemy RS z pewnymi ogólnymi współczynnikami; podstawiamy do równania i wyznaczamy te współczynniki.

Tabela przewidywania

Prawa strona $f(x)$ (a, b, c, d, k, ω — stałe znane)	Przewidywane RSRN (A, B, C, D — stałe nieznane)
ae^{kx}	Ae^{kx}
$a \sin \omega x + b \cos \omega x$	$A \sin \omega x + B \cos \omega x$
$a,\ a + bx,\ a + bx + cx^2, \ldots$	$A,\ A + Bx,\ A + Bx + Cx^2, \ldots$
$e^{kx}(a \sin \omega x + b \cos \omega x)$	$e^{kx}(A \sin \omega x + B \cos \omega x)$
$(a + bx)e^{kx}$	$(A + Bx)e^{kx}$
$(a + bx) \sin \omega x + (cx + d) \cos \omega x$	$(A + Bx) \sin \omega x + (Cx + D) \cos \omega x$

Bardziej dokładnie, całkę y_s można znaleźć metodą przewidywania w przypadkach:

— jeżeli $f(x) = e^{kx}P_n(x)$, gdzie $P_n(x)$ jest wielomianem stopnia n przewidując, że

$$y_s = x^p e^{kx} Q_n(x), \quad Q_n(x) \text{ jest szukanym wielomianem}$$

przy czym liczba p oznacza krotność pierwiastka k równania charakterystycznego (przypadek $p = 0$ oznacza, że k nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego).

— jeżeli $f(x) = e^{kx}[P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx]$, gdzie $P_n(x), Q_m(x)$ są wielomianami stopni n, m, przewidując, że

$$y_s = x^p e^{kx}[R_t(x) \cos bx + S_t(x) \sin bx], \quad R_t(x), S_t(x) \text{ szukane wielomiany, } t = \max(m, n)$$

przy czym liczba p jest krotnością pierwiastków zespolonych $k \pm \mathrm{i}\, b$ równania charakterystycznego (przypadek $p = 0$ oznacza, że $k \pm \mathrm{i}\, b$ nie są pierwiastkami równania charakterystycznego).

Przykłady. Stosując metodę przewidywania rozwiązać równania:

1) $y'' + 2y' + y = x^2 - x$

Równanie jednorodne ma rozwiązanie $y = (C_1 + C_2x)e^{-x}$.

Przewidujemy RS w postaci $y_s = Ax^2 + Bx + C$. Podstawiamy do równania i otrzymujemy $y_s = x^2 - 5x + 8$. Zatem RORNJ wynosi

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + x^2 - 5x + 8.$$

2) $y'' - 2y' = (x^2 + x + 1)e^{-2x}$.

Równanie jednorodne ma rozwiązanie $y = C_1 + C_2e^{2x}$.

Przewidujemy RS w postaci $y_s = (Ax^2 + Bx + C)e^{-2x}$. Podstawiamy do równania i otrzymujemy $y_s = \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{16}x + \frac{21}{64}\right)e^{-2x}$. Zatem RORNJ wynosi

$$y = C_1 + C_2xe^{2x} + \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{16}x + \frac{21}{64}\right)e^{-2x}.$$

3) $y'' + y' - 2y = \cos x + 2 \sin x$.

Równanie jednorodne ma rozwiązanie $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x$.

Przewidujemy RS w postaci $y_s = A \cos x + B \sin x$. Podstawiamy do równania i otrzymujemy $y_s = -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x$. Zatem RORNJ wynosi

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^x - \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x.$$

6.6. Zastosowanie równań liniowych rzędu drugiego

Przykład. W obwodzie połączono szeregowo opornik $R[\Omega]$, cewkę o indukcyjności $L[\mathrm{H}]$ oraz kondensator o pojemności $C[F]$. Wyznaczyć natężenie $i(t)$ prądu.

Rozwiązanie. Jeżeli U_R, U_L, U_C oznaczają spadki napięć, to z prawa Kirchhoffa otrzymujemy:

$$U_R + U_L + U_C = 0$$

przy czym $U_R = Ri$, $U_L = L\frac{di}{dt}$, $U_C = \frac{q}{C}$. Stąd

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0.$$

Ponieważ $i = \frac{dq}{dt}$, więc różniczkując względem t mamy

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0.$$

Jest to równanie liniowe jednorodne, którego wielomian charakterystyczny jest postaci

$$Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0.$$

Obliczamy wyróżnik:

$$\Delta = R^2 - \frac{4L}{C}.$$

Mamy trzy przypadki.

1. $\Delta > 0$. Wtedy pierwiastki są rzeczywiste i ujemne, bo ze wzorów Viete'a:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{R}{L} < 0, \ \lambda_1\lambda_2 = \frac{1}{LC} > 0.$$

Zatem $i(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}$. Wynika stąd, że $\lim_{t\to\infty} i(t) = 0$ oraz $i(t)$ jest malejąca.

2. $\Delta = 0$. Wtedy pierwiastkiem jest $\lambda_0 = -\frac{R}{2L}$.
Zatem $i(t) = (C_1 + C_2t)e^{-\frac{R}{2L}}$. Jak poprzednio, $\lim_{t\to\infty} i(t) = 0$, ale teraz $i(t)$ ma maksimum dla $t = \frac{2LC_2 - RC_1}{R}$.

3. $\Delta < 0$. Wtedy pierwiastki są zespolone, postaci:

$$\lambda_1 = -\delta + i\omega, \ \lambda_2 = -\delta + i\omega, \quad \text{gdzie } \delta = \frac{R}{2L}, \ \omega = \frac{1}{2L}\sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}$$

Zatem $i(t) = (C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t)e^{-\delta t}$. I tutaj $\lim_{t\to\infty} i(t) = 0$ ale mamy oscylacje.
Przykład. Ruch punktu poruszającego się pod działaniem tzw. siły elastycznej, tj. skierowanej do jednego punktu przestrzeni i proporcjonalnej do odległości od tego punktu (np. ciężarek zawieszony na sprężynie i wychylony z położenia równowagi).
Przyjmijmy, że tym punktem jest początek układu O, i że ruch odbywa się po osi Ox. Jeżeli $x(t)$ jest współrzędną punktu w chwili t, to

$$F = -k^2x(t),$$

dla pewnego k. Ale $F = ma(t) = mx''(t)$ (m — masa, a — przyspieszenie), więc

$$mx''(t) = -k^2x(t),$$

$$x''(t) + \frac{k^2}{m}x(t) = 0,$$

$$x''(t) + \omega^2x(t) = 0, \tag{15}$$

gdzie podstawiliśmy $\omega = \frac{k^2}{m}$.
Ruch pod działaniem siły elastycznej nazywamy *ruchem harmonicznym.* Równanie charakterystyczne to $r^2 + \omega^2 = 0$, więc $r = \pm\omega i$. Zatem rozwiązaniem ogólnym równania (15) jest

$$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t.$$

Zapiszemy to w postaci

$$x = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\Big(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\cos\omega t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\sin\omega t\Big).$$

Ponieważ

$$\Big(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\Big)^2 + \Big(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\Big)^2 = 1,$$

więc istnieje taka liczba γ, że

$$\sin\gamma = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}},\ \cos\gamma = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}},$$

zatem

$$x = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\big(\sin\gamma\cos\omega t + \cos\gamma\sin\omega t\big) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\sin(\omega t + \gamma) = A\sin(\omega t + \gamma),$$

gdzie $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$. Teraz widać, że ruch harmoniczny jest ruchem okresowym, przy czym okresem jest $T = \frac{2\pi}{\omega}$, bo $\sin\big(\omega(t + \frac{2\pi}{\omega}) + \gamma\big) = \sin(\omega t + \gamma)$.
Liczbę ω nazywamy *częstością kołową* (w elektrotechnice *pulsacją*), liczbę $\nu = \frac{1}{T}$ nazywamy *częstością*, $\omega t + \gamma$ — fazą, zaś stałą A — *amplitudą* ruchu.
Stałe A i γ można wyznaczyć z warunków początkowych.
Jeśli na punkt materialny prócz siły elastycznej $F = -k^2x$ działa dodatkowa siła $F_1 = -\rho x'$ ($\rho > 0$), proporcjonalna do prędkości lecz przeciwnie skierowana, to otrzymujemy tzw. *drgania tłumione.* Liczbę ρ nazywamy *współczynnikiem tłumienia.* Równanie ruchu ma wtedy postać

$$mx'' = -k^2x - \rho x', \tag{16}$$

czyli

$$x'' + \frac{\rho}{m}x' + \frac{k^2}{m}x = 0,$$

lub po podstawieniu $\frac{\rho}{m} = 2d,\ \frac{k^2}{m} = \omega^2$:

$$x'' + 2dx' + \omega^2 x = 0.$$

Gdy $\Delta > 0$, to mamy tzw. przypadek pełzający, gdy $\Delta = 0$ przypadek graniczny, a gdy $\Delta < 0$: przypadek periodyczny.

7. Równanie różniczkowe cząstkowe

Definicja 14. *Równaniem różniczkowym cząstkowym nazywamy równanie postaci*

$$f(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \ldots) = 0, \tag{17}$$

w którym występuje funkcja niewiadoma dwóch zmiennych $z = z(x, y)$ oraz jej pochodne cząstkowe.

Rzędem równania nazywamy najwyższy rząd pochodnej występującej w danym równaniu.
Całką szczególną (rozwiązaniem szczególnym) równania (17) w pewnym obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nazywamy każdą funkcję dwóch zmiennych określoną i mającą pochodne cząstkowe w Ω, która spełnia dane równanie.
Całką ogólną (rozwiązaniem ogólnym) równania nazywamy zbiór wszystkich całek szczególnych. Całka ogólna równania rzędu n zależy od n **dowolnych funkcji**.
Przykład. Rozpatrzmy równanie

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy.$$

Jeżeli $z = F(x,y)$ jest dowolną funkcją taką, że $\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy$, np. $F(x,y) = x^2y$, to zbiór funkcji postaci

$$z(x,y) = x^2y + g(y); \quad g(y) \text{ jest dowolną funkcją}$$

jest rozwiązaniem ogólnym.
Podobnie jak dla równań zwyczajnych, jeśli mamy dodatkowy warunek, to możemy wyznaczyć całkę szczególną spełniającą ten warunek. Gdy np. zażądamy, by funkcja $z(x,y)$ spełniała warunek

$$z(1,y) = y^2 + 2y,$$

to

$$y^2 + 2y = y + g(y),$$

skąd $g(y) = y^2 + y$. Szukaną całką szczególną będzie $z(x,y) = x^2y + y^2 + y$.
Zbiór punktów (x,y,z) takich, że $z = x^2y+y^2+y$ jest powierzchnią w przestrzeni. Nazywamy ją powierzchnią całkową równania. Ogólniej, $z = x^2y + g(y)$ jest rodziną powierzchni.
Problem wyznaczenia powierzchni całkowej danego równania przechodzącej przez daną z góry krzywą nazywamy *zagadnieniem Cauchy'ego.*

7.1. Równanie różniczkowe cząstkowe liniowe 1 rzędu

Definicja 15. *Równaniem różniczkowym cząstkowym liniowym nazywamy równanie postaci*

$$P(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y) \tag{18}$$

gdzie P, Q, R są funkcjami klasy C_1 zmiennych x, y w pewnym obszarze D.

Jeżeli $R(x,y) = 0$, to równanie nazywamy równaniem różniczkowym cząstkowym liniowym jednorodnym

$$P(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{19}$$

Z tym równaniem związane jest równanie zwyczajne:

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)}$$

nazywane *równaniem różniczkowym charakterystyk.* Rozwiązanie tego równania

$$\varphi(x,y) = C$$

jest geometrycznie rodziną krzywych zwanych *charakterystykami.*

Twierdzenie 6. *Jeżeli $\varphi(x,y) = C$ jest rozwiązaniem równania charakterystyk, to funkcja $z = \varphi(x,y)$ jest rozwiązaniem równania (19). Natomiast całka ogólna tego równania jest postaci*

$$z = F(\varphi)$$

gdzie F jest dowolną funkcją.

Przykład. Znaleźć całki szczególne równania

$$2\frac{\partial z}{\partial x} - 5\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

które przechodzą przez proste
a) $x = 2, z = 4 - 2y$;
b) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+1}{3}$
Rozwiązanie.

Równanie charakterystyk jest postaci

$$\frac{dx}{2} = \frac{dy}{-5}.$$

Jego rozwiązanie jest postaci $5x + 2y = C$. Zatem $z = 5x + 2y$ jest całką równania, a $z = F(5x + 2y)$ jest całką ogólną. Wyznaczymy postać funkcji F dla warunków a) i b).
a) Musi być

$$4 - 2y = F(10 + 2y)$$

Podstawmy $10 + 2y = u$. Wtedy mamy

$$4 - (u - 10) = F(u),$$

czyli $F(u) = 14 - u$. Gdy $u = 5x + 2y$, to $F(u) = z$, więc

$$14 - 5x - 2y = z$$

czyli $z = 14 - 5x - 2y$ jest szukaną całką szczególną. Geometrycznie jest to równanie płaszczyzny.
b) Podstawiając do rozwiązania ogólnego równania parametryczne prostej: $x = 1 + 2t$, $y = -3 + 4t$, $z = -1 + 3t$ otrzymamy

$$-1 + 3t = F(18t - 1) = F(u) \quad \text{dla } u = 18t - 1$$

skąd

$$\frac{u-5}{6} = F(u).$$

Podstawiamy teraz $u = 5x + 2y$ i mamy $z = \frac{1}{6}(5x + 2y - 5)$. Podobnie jak w a) jest to równanie płaszczyzny.
Przykład. Znaleźć całkę szczególną równania

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

przechodzącą przez krzywą $l : x = 0, z = \frac{1}{2}y^2$.
Rozwiązanie.
Równanie charakterystyk jest postaci

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}.$$

skąd otrzymamy $x^2 - y^2 = C$. Całką ogólną jest zatem $z = F(x^2 - y^2)$.
Z warunku początkowego mamy

$$\frac{1}{2}y^2 = F(-y^2).$$

Przyjmując $u = -y^2$ otrzymamy $-\frac{1}{2}u = F(u)$, a gdy $u = x^2 - y^2$, to $-\frac{1}{2}(x^2 - y^2) = z$, czyli

$$z = \frac{1}{2}(y^2 - x^2).$$

Rozważmy teraz równanie liniowe niejednorodne (18):

$$P(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y).$$

Tym razem równanie charakterystyk jest postaci:

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)} = \frac{dz}{R(x,y)}$$

Rozwiązaniami tego **układu równań** są dwie tzw. *całki pierwsze*:

$$\varphi_1(x, y, z) = C_1,\ \varphi_2(x, y, z) = C_2,$$

a rozwiązanie ogólne to

$$F(\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z)) = 0.$$

Przykłady. 1. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$2\frac{\partial z}{\partial x} + 3\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

Rozwiązanie.
Równanie charakterystyk jest postaci

$$\frac{dx}{2} = \frac{dy}{3} = \frac{dz}{1},$$

skąd otrzymamy $3x - 2y + C_1,\ x - 2z = C_2$. Rozwiązanie jest dane równością

$$F(3x - 2y, x - 2z) = 0,$$

gdzie F jest dowolną funkcją dwóch zmiennych.
2. Znaleźć rozwiązanie szczególne równania

$$xy\frac{\partial z}{\partial x} - y^2\frac{\partial z}{\partial y} = -x^2,$$

przechodzącą przez krzywą $x = 3t, y = t^2, z = t^3 - 3$.
Rozwiązanie.
Równanie charakterystyk jest postaci

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-y^2} = \frac{dz}{-x^2}.$$

Rozwiązujemy więc układ:

$$\begin{cases} \frac{dx}{xy} & = & -\frac{dy}{y^2} \\ \frac{dx}{xy} & = & -\frac{dz}{x^2} \end{cases}$$

Z pierwszego równania mamy po rozdzieleniu zmiennych i całkowaniu $xy = C_1$ (to jest jedna całka pierwsza). Wstawiając C_1 w mianowniku drugiego równania otrzymamy po rozdzieleniu zmiennych i całkowaniu $\frac{1}{3}x^3 + C_1 z = C_2$; podstawiając "zwrotnie" $C_1 = xy$ mamy $\frac{1}{3}x^3 + xyz = C_2$ (to jest druga całka pierwsza). Dla punktów krzywej mamy

$$C_1 = xy = 3t^3, \quad C_2 = \frac{1}{3}x^3 + xyz = 3t^6 = \frac{1}{3}C_1^2.$$

Stąd otrzymamy związek między C_1 i C_2:

$$3C_2 = C_1^2,$$

$$x^3 + 3xyz = x^2y^2,$$

$$z = \frac{x^2y^2 - x^3}{3xy} = \frac{1}{3}(xy - \frac{x^2}{y}).$$