Maciej Grzesiak
Instytut Matematyki Politechniki Poznańskiej

Ciągi. Granica ciągu i granica funkcji.

1. Ciągi

Ciąg jest to funkcja określona na zbiorze $\mathbb{N}$ lub jego podzbiorze. Z tego względu ciągi dzielimy na skończone i nieskończone. W dalszym ciągu będziemy rozpatrywać jedynie ciągi, których wartościami są liczby rzeczywiste. Wartość przyporządkowaną liczbie n oznaczamy a_n (lub b_n, c_n, x_n itp.) i nazywamy n-tym wyrazem ciągu. Cały ciąg oznaczamy symbolem (a_n).
Są różne sposoby określenia ciągów. Można podać wzór na wyraz ogólny ciągu, np. $a_n = 3n^3 - 2n + 5$. Wtedy możemy obliczyć dowolny konkretny wyraz, np. $a_{100} = 2998059$, nie znając innych wyrazów. Ale często określa się ciąg *rekurencyjnie*, tzn. podaje się pierwszy wyraz a_1 i wzór określający a_{n+1} jako funkcję a_n. Przykładowo, niech $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n - 4$. Wtedy obliczamy kolejno $a_2 = 2 \cdot 3 - 4 = 2$, $a_3 = 2 \cdot 2 - 4 = 0$, itd.
Dysponując tylko wzorem rekurencyjnym musimy obliczać wyrazy po kolei. Czasem można na podstawie wzoru rekurencyjnego znaleźć wzór ogólny. Np. ciąg określony równościami $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n + 4$ jest dobrze znanym ciągiem arytmetycznym, i jego wyraz ogólny to $a_n = 5 + 4(n-1) = 4n + 1$. Wzór ogólny może być jednak zaskakująco skomplikowany. Weźmy jako przykład *ciąg Fibonacciego* u_n określony zależnościami:

$$u_1 = u_2 = 1, \quad u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots$$

Kolejne wyrazy tego ciągu to $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$. Ale wzór ogólny (trudny do znalezienia, chociaż łatwy do udowodnienia przez indukcję) ma postać:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots$$

Niektóre ciągi można określić tylko opisowo. Przykładowo:

$$p_n = n-\text{ta kolejna liczba pierwsza.}$$

Tak więc jest to ciąg $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$. Niestety nie jest znany ani wzór ogólny ani rekurencyjny dla tego ciągu.
Ciąg jest szczególnym przypadkiem funkcji. Jego wykres to zbiór izolowanych punktów na płaszczyźnie (o współrzędnych (n, a_n)).

Definicja 1. *Ciąg (a_n) nazywamy ograniczonym z dołu (z góry), gdy zbiór $\{a_n\}$ jego wyrazów jest ograniczony z dołu (odp.: z góry), tj., gdy:*

$$\exists_{m\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}} a_n \geqslant m \quad (\exists_{M\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}} a_n \leqslant M).$$

Jeżeli ciąg jest ograniczony z dołu i z góry, to nazywamy go po prostu ograniczonym. Symbolicznie:

$$\exists_{M\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \leqslant M.$$

Przykłady. 1. Ciąg $a_n = \frac{n+5}{n^2}$ jest ograniczony, bo:

$$|a_n| = a_n = \frac{n+5}{n^2} \leqslant \frac{n+5}{n} = 1 + \frac{5}{n} \leqslant 6.$$

2. Ciąg $b_n = \operatorname{ctg}\frac{1}{n}$ nie jest ograniczony, bo dla dowolnie dużego M istnieje liczba n taka, że $\operatorname{ctg} 1/n > M$ (wystarczy wziąć $n > 1/\operatorname{arcctg} M$). Np. dla $M = 1000$ obliczamy (przy pomocy kalkulatora)

$$\frac{1}{\operatorname{arcctg} 1000} = \frac{1}{\operatorname{arc\,tg} 0,001} \approx 17,45.$$

Zatem dla $n = 18, 19, 20, \ldots$ wartości ciągu b_n są większe od 1000.
Uwaga. Kalkulatory na ogół nie mają funkcji arcctg, bo nie jest potrzebna. Aby obliczyć $\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arc\,tg} 1/x$ wpisujemy x, i kolejno klawisze: `1/x`, `Shift`, `tan`.

Definicja 2. *Ciąg* (a_n) *nazywamy* rosnącym (malejącym), *gdy dla* $n \in \mathbb{N}$ *mamy* $a_{n+1} > a_n$ *(odpowiednio* $a_{n+1} < a_n$*).*

Ciągi rosnące i malejące nazywamy ciągami monotonicznymi. Monotoniczność ciągu stwierdzamy badając znak różnicy $a_{n+1} - a_n$.
Przykład. 1. Ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ jest malejący, bo

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0.$$

Przykład. 2. Ciąg $a_n = \frac{n+1}{n^2+1}$ jest również malejący (oblicz $a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{n^2+2n+2} - \frac{n+1}{n^2+1}$).
Uwaga. Jeżeli ciąg ma wyrazy dodatnie to zamiast różnicy $a_{n+1} - a_n$ można badać iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Jeśli jest on większy od 1, to ciąg jest rosnący, jeśli mniejszy — malejący.
Przykład. 3. Ciąg $a_n = \frac{n^n}{n!}$ jest rosnący, bo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} > 1.$$

2. Granice ciągów

Mówimy, że ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy a, gdy w dowolnym otoczeniu punktu a leżą prawie wszystkie wyrazy tego ciągu.

Definicja 3. *Ciąg* (a_n) *jest zbieżny do granicy* a*, gdy*

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \in \mathbb{N}} n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Piszemy wtedy $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ lub $a_n \to a$.
Ciąg mający granicę nazywamy *zbieżnym*. Każdy ciąg zbieżny ma tylko jedną granicę.
Nierówność

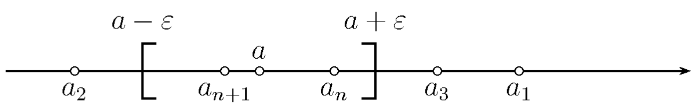
$$|a_n - a| < \varepsilon$$

jest równoważna nierówności

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon,$$

czyli

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$



Rysunek 1. Ilustracja pojęcia granicy ciągu

Przykład. Ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ ma kolejne wyrazy $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$. Zatem można przypuszczać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Aby wykazać to formalnie, weźmy $\varepsilon > 0$. Jakie musi być n, by $\frac{1}{n} < \varepsilon$? Wystarczy $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Zatem jako N można obrać część całkowitą liczby $\frac{1}{\varepsilon}$ (lub dowolną liczbę większą od niej). Np. gdy $\varepsilon = 10^{-6}$, to $N = \frac{1}{10^{-6}} = 10^6$.
Jeżeli dalekie wyrazy ciągu są większe od dowolnie dużej liczby, to mówimy, że ciąg jest *rozbieżny do nieskończoności* (lub, że ma granicę niewłaściwą równą ∞). Dokładniej:

Definicja 4. *Ciąg* (a_n) *jest rozbieżny do* ∞, *gdy*

$$\forall_{M>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\in\mathbb{N}} n > n_0 \Rightarrow a_n > M.$$

Piszemy $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. *Analogicznie określamy ciąg rozbieżny do* $-\infty$:

$$\lim_{n\to-\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall_M \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\in\mathbb{N}} n > n_0 \Rightarrow a_n < M.$$

Przykład. $\lim\limits_{n\to\infty}(n^3 - n^2) = \infty$.
Uzasadnienie: Niech $M > 0$. Ponieważ $n^3 - n^2 = n^2(n-1) \geqslant n^2$ dla $n > 1$, więc wystarczy by było

$$n^2 > M,$$

czyli

$$n > \sqrt{M}.$$

Jeśli przyjmiemy $N = [\sqrt{M}]$, to dla $n > N$ będzie

$$n^3 - n^2 \geqslant n^2 > M,$$

a zatem $\lim\limits_{n\to\infty}(n^3 - n^2) = \infty$.

Twierdzenie 1. (własności arytmetyczne granicy ciągu) *Niech* (a_n), (b_n) *będą ciągami zbieżnymi, a liczba* c *— stałą. Wtedy*

1. $\lim_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim_{n\to\infty} a_n$;
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$;
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$;
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$, *o ile* $b_n \neq 0$ *i* $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

Krótko: *granica sumy (różnicy, iloczynu, ilorazu) jest sumą (różnicą, iloczynem, ilorazem) granic.*
Twierdzenia nie można stosować, gdy chociaż jedna z granic jest niewłaściwa (tzn. $\pm\infty$). Na symbolach $\pm\infty$ nie można wykonywać działań!
Przykłady. 1. Obliczymy granicę ciągu $a_n = \frac{2n^2-n+3}{-3n^2+4}$.
Tutaj licznik dąży do ∞, a mianownik do $-\infty$, więc twierdzenia o granicy ilorazu nie można bezpośrednio stosować. Możemy jednak przekształcić ułamek:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n+3}{-3n^2+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(2-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2})}{n^2(-3+\frac{4}{n^2})} = \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{-3+\frac{4}{n^2}} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}.$$

Pokazany wyżej sposób (wyłączenie najwyższej potęgi z licznika i mianownika, a następnie skrócenie ułamka) jest często stosowany przy obliczaniu granic.
2. Granicę ciągu $a_n = \sqrt{n^2+3n+10} - n$ obliczamy tak. Ze wzoru $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$ mamy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+10-n^2}{\sqrt{n^2+3n+10}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(3+\frac{10}{n})}{n(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{10}{n^2}}+1)} = \frac{3}{2}.$$

Niesłychanie ważna jest granica ciągu $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Zobaczmy, jak wyglądają jego pierwsze wyrazy:

$$a_1 = 2,$$

$$a_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2,25,$$

$$a_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \approx 2,37,$$

$$a_4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 \approx 2,44,$$

$$a_5 = \left(\frac{6}{5}\right)^5 \approx 2,49,$$

$$a_6 = \left(\frac{7}{6}\right)^6 \approx 2,52.$$

Widać, że kolejne wyrazy ciągu rosną. Oczywiście kilka wartości to mało, ale można całkiem formalnie wykazać, że ciąg $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący. Nie rośnie on jednak do ∞; już z tych kilku wypisanych wyrazów widać, że różnice między kolejnymi wyrazami są coraz mniejsze. Posługując się arkuszem kalkulacyjnym możemy szybko wyliczyć np. 200 pierwszych wyrazów i utwierdzić się w tym przekonaniu. Np. $a_{50} = 2,6916$, $a_{100} = 2,7048$, $a_{150} = 2,7093$, $a_{200} = 2,7115$ (w przybliżeniu).
Przekonanie nie stanowi dowodu, ale już w XVIII wieku matematyk szwajcarski Leonhard Euler udowodnił, że ten ciąg ma granicę skończoną. Nie można jej dokładnie obliczyć ponieważ jest to liczba niewymierna. Euler wprowadził więc literę e na oznaczenie tej granicy.

$$e \approx 2,71828183$$

Liczba e jest, obok liczby π (definiowanej jako stosunek długości okręgu do jego średnicy), jedną z najważniejszych liczb w matematyce.
Można wykazać, że dla dowolnego ciągu (a_n), dla którego $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ lub $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ mamy

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.}$$

Przykład.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^{n^2+1} = e.$$

Przykład.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}}.$$

Inne twierdzenia o granicy ciągu.

Twierdzenie 2. (o trzech ciągach) *Jeżeli ciągi (a_n), (b_n), (c_n) spełniają warunki:*
1. $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ *dla każdego* $n \geqslant n_0$*;*
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = b$*,*

to $\lim_{n\to\infty} b_n = b$*.*

Przykład. Aby obliczyć $\lim_{n\to\infty}\sqrt{2^n+3^n+4^n}$ korzystamy z nierówności

$$\sqrt{4^n} < \sqrt{2^n+3^n+4^n} < \sqrt{3\cdot 4^n}.$$

Ciągi skrajne są zbieżne do 4, a więc ciąg środkowy jest także zbieżny do 4. **Przykład.**

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1 \text{ (dla } a > 0)}$$

D o w ó d. Załóżmy, że $a > 1$, i niech $a_n = \sqrt[n]{a} - 1$. Wtedy

$$a = (1+a_n)^n \geqslant 1 + na_n$$

(korzystamy z nierówności Bernoullego). Zatem $na_n \leqslant a-1$, a więc

$$0 \leqslant a_n \leqslant \frac{a-1}{n}.$$

Ciągi skrajne mają granicę 0, zatem $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, a więc $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$.
Dla $a = 1$ oczywiście $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$, a dla $a < 1$ mamy:

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}},$$

a ponieważ $\frac{1}{a} > 1$, więc mianownik dąży do 1, zatem $\sqrt[n]{a}$ też.
Należy także znać następujące granice:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ (dla } |q| < 1)}$$

W zapisie poniższego twierdzenia zastosujemy symboliczne skróty. Np. zamiast pisać dokładnie:
jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, *gdzie* $-\infty < a \leqslant \infty$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, *to* $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$
napiszemy krótko: $a + \infty = \infty$.

Twierdzenie 3. (o granicach niewłaściwych ciągów) *Dla granic niewłaściwych obowiązują następujące reguły:*

1. $a + \infty = \infty$ *dla* $-\infty < a \leqslant \infty$
2. $a \cdot \infty = \infty$ *dla* $0 < a \leqslant \infty$
3. $\frac{a}{\infty} = 0$ *dla* $-\infty < a < \infty$
4. $\frac{a}{0^+} = \infty$ *dla* $-\infty < a \leqslant \infty$
5. $a^\infty = 0$ *dla* $|a| < 1$
6. $a^\infty = \infty$ *dla* $1 < a \leqslant \infty$
7. $\infty^b = 0$ *dla* $-\infty \leqslant b < 0$
8. $\infty^b = \infty$ *dla* $0 < b \leqslant \infty$

Uwaga. Brak ogólnych twierdzeń dotyczących następujących granic:

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 1^\infty, \quad \infty^0, \quad 0^0$$

Powyższe symbole nazywamy wyrażeniami nieoznaczonymi.

3. Granica funkcji

Przy określaniu granicy funkcji będziemy posługiwali się pojęciem *sąsiedztwa punktu.*

Definicja 5. Sąsiedztwem *o promieniu* $\delta > 0$ *punktu* $x_0 \in \mathbb{R}$ *nazywamy zbiór*

$$S(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) = \{x : \ 0 < |x - x_0| < \delta\}.$$

Analogicznie definiujemy *sąsiedztwo lewostronne*:

$$S(x_0^-, \delta) = (x_0 - \delta, x_0),$$

i *sąsiedztwo prawostronne*:

$$S(x_0^+, \delta) = (x_0, x_0 + \delta).$$

Czasem w zapisie będziemy opuszczali promień δ, pisząc np. tylko $S(x_0)$.

Definicja 6. *Niech* $x_0 \in \mathbb{R}$ *i niech* $y = f(x)$ *będzie określona przynajmniej w sąsiedztwie* $S(x_0)$. *Mówimy, że granica funkcji w punkcie* x_0 *jest równa* g, *jeżeli dla dla dowolnego ciągu* (x_n), $x_n \in S(x_0)$ *zbieżnego do* x_0 *ciąg wartości funkcji* $(f(x_n))$ *dąży do* g. *W zapisie symbolicznym:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \Longleftrightarrow \forall_{(x_n)\subset S(x_0)} \big[\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g \big]$$

Przykład. 1. Korzystając z definicji uzasadnić, że:
a) $\lim_{x\to 3}(2x + 4) = 10$; b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2}{x+3} = \frac{4}{5}$.
a) Dla dowolnego ciągu (x_n), $x_n \to 3$ mamy

$$\lim_{n\to\infty}(2x_n + 4) = 2 \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} 4 = 2 \cdot 3 + 4 = 10.$$

b) Dla dowolnego ciągu (x_n), $x_n \to 2$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{x_n+3} = \frac{(\lim_{n\to\infty} x_n)^2}{\lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} 3} = \frac{2^2}{2+3} = \frac{4}{5}.$$

Przykład. 2. Uzasadnić, że nie istnieje $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$.
Wystarczy podać dwa ciągi x_n, x_n' dla których granice wartości funkcji będą różne. Niech $x_n = \frac{1}{n\pi}$. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sin(n\pi) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Biorąc $x_n' = \frac{1}{\pi/2+2n\pi}$ otrzymamy:

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n'} = \lim_{n\to\infty} \sin(\frac{\pi}{2}+2n\pi) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Otrzymaliśmy różne liczby dla różnych ciągów, zatem granica nie istnieje.
Zastępując w powyższej definicji sąsiedztwo $S(x_0)$ sąsiedztwem lewostronnym lub sąsiedztwem prawostronnym otrzymamy definicję granicy lewostronnej bądź prawostronnej:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = g \iff \forall_{(x_n)\subset S(x_0^-)} \big[\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \;\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g\big]$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = g \iff \forall_{(x_n)\subset S(x_0^+)} \big[\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \;\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g\big]$$

Podobnie określamy granice przy $x\to\infty$ czy $x\to-\infty$.
Uwaga. Podana wyżej definicja granicy pochodzi od Heinego. Popularna jest równoważna jej definicja Cauchy'ego, ale ją pominiemy.
Ponieważ przy wprowadzaniu granicy funkcji posłużyliśmy się granicą ciągu, to następujące niżej twierdzenie wynika z podobnego twierdzenia dla granic ciągów.

Twierdzenie 4. (własności arytmetyczne granicy funkcji) *Niech $f(x)$, $g(x)$ będą funkcjami, a liczba c — stałą. Wtedy*

1. $\lim_{x\to x_0}(cf(x)) = c\lim_{x\to x_0} f(x)$;
2. $\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$;
3. $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$;
4. $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, *o ile* $g(x)\neq 0$ *i* $\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$.

Krótko: *granica sumy (różnicy, iloczynu, ilorazu) jest sumą (różnicą, iloczynem, ilorazem) granic.*
W tym twierdzeniu x_0 może być liczbą lub jednym z symboli $\pm\infty$. Stosuje się także do granic jednostronnych.
Twierdzenia nie można stosować, gdy chociaż jedna z granic jest niewłaściwa (tzn. $\pm\infty$). Na symbolach $\pm\infty$ nie można wykonywać działań.
Przykłady obliczania granic.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-1}{x^2-2} = \frac{3^2+3-1}{3^2-2} = \frac{11}{7},$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = \lim_{x\to -3}(x-3) = -3-3 = -6,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3+x}{2x^3+x^2-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3(-1+\frac{1}{x^2})}{x^3(2+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3})} = \frac{-1+0}{2+0-0} = -\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 2}\Big(\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\Big) = \lim_{x\to 2}\frac{4-(x+2)}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{-1}{x+2} = -\frac{1}{4}$$

Ważna jest następująca (bynajmniej nie oczywista!) granica.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.}$$

Znając ją można obliczać inne granice, np.:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{5x} = \lim_{x\to 0}\frac{4}{5}\cdot\frac{\sin 4x}{4x} = \frac{4}{5}\cdot 1 = \frac{4}{5},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 3x}{4x} = \lim_{x\to 0}\frac{3}{4}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{1}{\cos 3x} = \frac{3}{4}\cdot 1\cdot 1 = \frac{3}{4}.$$

Należy znać również następujące granice:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}}$$

4. Asymptoty wykresu funkcji

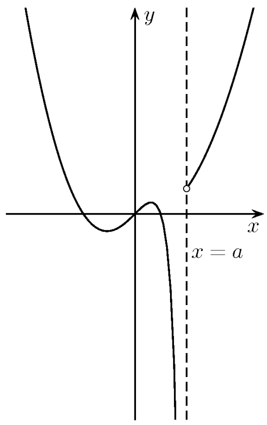
Definicja 7. *Prostą $x = a$ nazywamy* asymptotą pionową lewostronną *funkcji $y = f(x)$, gdy*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \quad \text{lub} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty.$$

Analogicznie, warunek

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \quad \text{lub} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty.$$

określa *asymptotę pionową prawostronną.*



Rysunek 2. Asymptota pionowa lewostronna

Jeżeli zarówno granica lewo- i prawostronna są nieskończone, to mówimy o asymptocie obustronnej.

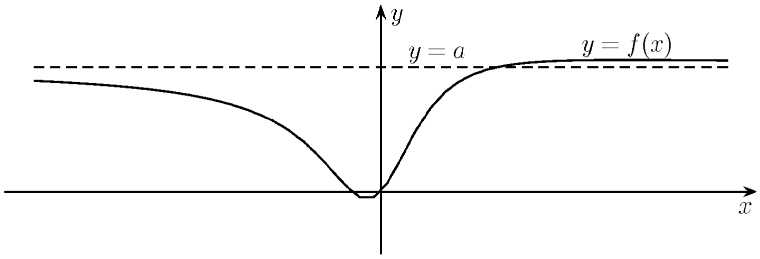
Definicja 8. *Prostą $y = ax + b$ nazywamy* asymptotą ukośną *funkcji $y = f(x)$, gdy*

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - ax - b) = 0 \quad \text{lub} \quad \lim_{x\to -\infty}(f(x) - ax - b) = 0.$$

W szczególności, gdy $a = 0$ asymptota jest pozioma.

Zauważmy, że z równości

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - ax - b) = 0,$$



Rysunek 3. Asymptota pozioma

po podzieleniu obustronnie przez x otrzymamy $\lim_{x\to\infty}(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}) = 0$, czyli

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a.$$

Oznacza to, że jeżeli istnieje asymptota $y = ax + b$, to współczynnik a jest granicą ilorazu $\frac{f(x)}{x}$. W konsekwencji można wykazać następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5. *Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną funkcji $y = f(x)$, wtedy, i tylko wtedy, gdy*

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{oraz} \quad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax).$$

Przykłady. Znaleźć asymptoty ukośne funkcji:
1. $y = x - \frac{1}{x}$ (odp.: $y = x$);
2. $y = \frac{3x^2+5x}{x+1}$ (odp.: $y = 3x + 2$);
3. $y = xe^{\frac{1}{x}}$ (odp.: $y = x + 1$);
4. $y = x\ln(e + \frac{1}{x})$ (odp.: $y = x + \frac{1}{e}$);
5. $y = \frac{x^3-x+3}{2x^2-3x}$ (odp.: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}2$).

5. Ciągłość funkcji

Wprowadzimy najpierw pojęcie *otoczenia punktu.*

Definicja 9. Otoczeniem *o promieniu $\delta > 0$ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy zbiór*

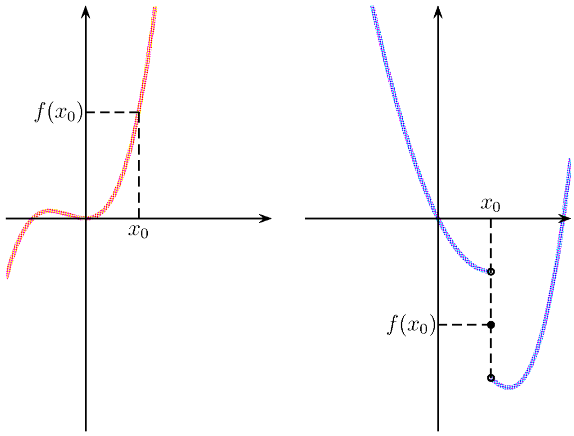
$$O(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Definicja 10. *Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ i niech $y = f(x)$ będzie określona przynajmniej w otoczeniu $O(x_0)$. Funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie x_0 wtedy, i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Potocznie mówimy, że funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie gdy jej wykres nie "przerywa" się w tym punkcie.
Z definicji wynika, że funkcja jest nieciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje $\lim_{x\to x_0} f(x)$ albo, gdy $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.
Punkt, w którym funkcja jest nieciągła nazywamy *punktem nieciągłości* funkcji.
Ciągłość jest zachowana przy wykonywaniu działań na funkcjach. Mówi o tym następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6. (o rachunku funkcji ciągłych) *Niech $f(x)$, $g(x)$ będą funkcjami ciągłymi w punkcie x_0, a liczba c — stałą. Wtedy*
1. *funkcja $cf(x)$ jest ciągła w punkcie x_0;*
2. *funkcja $f(x) + g(x)$ jest ciągła w punkcie x_0;*



Rysunek 4. Wykres funkcji ciągłej i nieciągłej

3. *funkcja* $f(x) - g(x)$ *jest ciągła w punkcie* x_0*;*
4. *funkcja* $f(x) \cdot g(x)$ *jest ciągła w punkcie* x_0*;*
5. *funkcja* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *jest ciągła w punkcie* x_0*, o ile* $g(x_0) \neq 0$.

Krótko: *Suma (różnica, iloczyn, iloraz) funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.*
Mówimy, że *funkcja jest ciągła na zbiorze*, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

Twierdzenie 7. (Darboux) *Jeżeli funkcja* $f(x)$ *jest ciągła na przedziale* $[a, b]$ *oraz* $f(a) < f(b)$*, to*

$$\forall_{w \in (f(a), f(b))} \exists_{c \in (a,b)} f(c) = w.$$

Oznacza to, że funkcja przyjmuje wszystkie wartości pośrednie między $f(a)$ i $f(b)$. Np. jeśli dla pewnej funkcji ciągłej $f(x)$ mamy $f(2) = -5$ oraz $f(5) = 1$, to musi istnieć liczba $c \in (2, 5)$ dla której $f(c) = 0$.
Przykład. Uzasadnić, że równanie

$$x^4 + x - 1 = 0$$

ma rozwiązanie dodatnie.
Niech $f(x) = x^4 + x - 1$. Obliczamy; $f(0) = -1$, $f(1) = 1$. Stąd wnioskujemy, że funkcja musi mieć w pewnym punkcie przedziału $(0, 1)$ wartość 0 i ten punkt jest rozwiązaniem równania. Można ten pierwiastek "lokalizować" dokładniej: ponieważ $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{16} + \frac{1}{2} - 1 < 0$, więc pierwiastek leży w $(\frac{1}{2}, 1)$.
Ciągłość niektórych funkcji. Łatwo uzasadnić, że funkcja stała $y = c$, $c =$ const oraz funkcja tożsamościowa $y = x$ są ciągłe w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$. Ponieważ wielomian powstaje z tych dwóch typów funkcji za pomocą dodawania i mnożenia, więc na podstawie twierdzenia o rachunku funkcji ciągłych jest on też funkcją ciągłą. Z tego samego twierdzenia wynika dalej, że funkcja wymierna (jako iloraz dwóch wielomianów) jest ciągła w każdym punkcie, który nie jest miejscem zerowym mianownika. Ponieważ $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, więc funkcja pierwiastkowa jest także ciągła. Dalej, funkcje sinus i cosinus są ciągłe w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$, a zatem tangens i cotangens są ciągłe wszędzie tam, gdzie są określone. Ciągłe są też funkcje wykładnicze i logarytmiczne.
Uwaga. Może powstać wrażenie, że "większość funkcji jest ciągła". Jest to nieprawda, chociaż w istocie w praktyce posługujemy się przeważnie funkcjami ciągłymi.
Przykład. Funkcja Dirichleta:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \text{ jest liczbą wymierną,} \\ 0 & \text{gdy } x \text{ jest liczbą niewymierną} \end{cases}$$

jest przykładem "skrajnie nieciągłej" funkcji; można wykazać, że w żadnym punkcie nie ma ona żadnej z granic jednostronnych.