Maciej Grzesiak
Instytut Matematyki Politechniki Poznańskiej

Całki nieoznaczone

1. Definicja całki nieoznaczonej

Definicja 1. *Funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I, jeżeli*

$$F'(x) = f(x) \quad \text{dla każdego } x \in I.$$

Np. funkcjami pierwotnymi funkcji $f(x) = \sin x$ na $\mathbb{R}$ są $-\cos x$, $-\cos x + 1$, $-\cos x - 100$.

Twierdzenie 1. (podstawowe o funkcjach pierwotnych) *Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I. Wtedy*

1. *funkcja $G(x) = F(x) + C$ jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I dla dowolnej stałej $C \in \mathbb{R}$.*
2. *każdą funkcję pierwotną funkcji f na I można przedstawić w postaci $F(x) + D$, gdzie $D \in \mathbb{R}$.*

Twierdzenie 2. (warunek wystarczający istnienia funkcji pierwotnej) *Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale, to ma funkcję pierwotną na tym przedziale.*

Definicja 2. *Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I. Całką nieoznaczoną funkcji f na przedziale I nazywamy zbiór funkcji*

$$\{F(x) + C : \quad C \in \mathbb{R}\}.$$

Całkę nieoznaczoną funkcji f oznaczamy przez $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.
Jeżeli istnieje całka funkcji $f(x)$, to funkcję nazywamy całkowalną.
W praktyce nie piszemy nawiasów klamrowych zapisując całkę jako pojedynczą funkcję pierwotną. Również działania na całkach będą działaniami na funkcjach reprezentujących te całki. Na przykład zauważmy własności:

$$\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = f(x),$$

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C.$$

1.1. Wzory podstawowe

Ze wzorów na pochodne wynikają następujące wzory dla całek.

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \in \mathbb{R}, n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \sinh x \,\mathrm{d}x = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x \,\mathrm{d}x = \sinh x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} = -\operatorname{ctgh} x + C$$

Ponadto mamy wzór

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C.$$

Wszystkie powyższe wzory można sprawdzić obliczając pochodną prawej strony równości. Również następne twierdzenie jest konsekwencją własności pochodnych funkcji.

Twierdzenie 3. (o działaniach arytmetycznych na całkach oznaczonych) *Jeżeli funkcje f i g mają funkcje pierwotne, to*

1. $\int (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$,
2. $\int (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x - \int g(x)\,\mathrm{d}x$,
3. $\int (cf(x))\,\mathrm{d}x = c\int f(x)\,\mathrm{d}x$,

Przykłady.

1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt[3]{x^2}}$
2. $\int \frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$
3. $\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$
4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x}$
5. $\int \frac{x^2(x^3+1)}{\sqrt{x}(x^2-x+1)}\,\mathrm{d}x$
6. $\int \frac{x^4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$
7. $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+6}$
8. $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$

Twierdzenie 4. (o całkowaniu przez podstawienie) *Jeżeli funkcja $f(t)$ jest całkowalna w przedziale (a,b) i funkcja $t=\varphi(x)$ ma ciągłą pochodną w (α,β) oraz $a<\varphi(x)<b$ dla $x\in(\alpha,\beta)$, to*

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t.$$

D o w ó d. Niech $F(t)$ będzie funkcją pierwotną funkcji $f(t)$, tzn. $F'(t)=f(t)$. Z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej mamy

$$\big(F(\varphi(x))\big)' = f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zatem

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C.$$

Podstawiając po prawej stronie $\varphi(x) = t$ otrzymujemy

$$\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(t) + C,$$

a zatem

$$\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Przykłady.
1. $\int (3x-5)^{25}\,\mathrm{d}x$
2. $\int \frac{1}{3x-5}\,\mathrm{d}x$
3. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$
4. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

Wniosek 1. *Jeżeli funkcja $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, to*

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

Przykłady.
1. $\int \cos(3x+1)\,\mathrm{d}x$
2. $\int e^{2x}\,\mathrm{d}x$

Twierdzenie 5. (o całkowaniu przez części) *Jeżeli funkcje $u(x)$ i $v(x)$ mają w pewnym przedziale ciągłe pochodne, to*

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

D o w ó d. Ze wzoru na pochodną iloczynu

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + v(x)u'(x)$$

wynika, że

$$\int (u(x)v(x))'\,\mathrm{d}x = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x,$$

czyli

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x,$$

a więc

$$\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Przypomnijmy, że $v'(x)\,\mathrm{d}x = dv$, $u'(x)\,\mathrm{d}x = du$ (różniczki). Zatem wzór na całkowanie przez części można zapisać krócej

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Przykłady.
1. $\int \ln x\,\mathrm{d}x$
2. $\int x\sin 2x\,\mathrm{d}x$
3. $\int x\,\mathrm{arc\,tg}\,x\,\mathrm{d}x$
4. $\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x$
5. $\int x^3e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

1.2. Wzory rekurencyjne

Poniższe wzory wyprowadza się stosując całkowanie przez części.

1.

$$\int \sin^n x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, \mathrm{d}x, \qquad n \geqslant 2,$$

2.

$$\int \cos^n x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, \mathrm{d}x, \qquad n \geqslant 2,$$

3.

$$\int x^n a^x \, \mathrm{d}x = \frac{x^n a^x}{\ln a} - \frac{n}{\ln a} \int x^{n-1} a^x \, \mathrm{d}x, \qquad n \geqslant 1,$$

4.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n-1}}, \qquad n \geqslant 2,$$

5.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2} \int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{n-1}}, \qquad n \geqslant 2,$$

1.3. Wzory dodatkowe

1.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C$$

2.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

3.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

4.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

5.

$$\int \sqrt{a^2-x^2} = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{a^2-x^2} + C$$

6.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}} = \ln |x + \sqrt{x^2+a}| + C$$

7.

$$\int \sqrt{x^2+a} \, \mathrm{d}x = \frac{a}{2} \ln |x + \sqrt{x^2+a}| + \frac{x}{2} \sqrt{x^2+a} + C$$

Przykłady.

1. $\int \sqrt{4-x^2} \, \mathrm{d}x$
2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-7}}$

1.4. Całkowanie funkcji wymiernych

Definicja 3. *Funkcją wymierną nazywamy iloraz dwóch wielomianów, tj. funkcję postaci* $\frac{P(x)}{Q(x)}$*, gdzie* $P(x)$*,* $Q(x)$ *są wielomianami. Jeżeli* $\deg P < \deg Q$*, to funkcję wymierną nazywamy właściwą (lub ułamkiem właściwym).*

Jeżeli $\deg P \geqslant \deg Q$, to można wykonać dzielenie. Otrzymamy iloraz $S(x)$ i resztę $R(x)$, tj.:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Zatem funkcje wymierną niewłaściwą można przedstawić w postaci sumy wielomianu i ułamka właściwego.
Przykład. Przedstawić w postaci sumy wielomianu i ułamka właściwego funkcję $\frac{x^3+5x^2-7}{x^2+1}$.

Definicja 4. *Funkcję wymierną postaci*

$$\frac{A}{(x+a)^n}, \quad n \in \mathbb{N},\ a, A \in \mathbb{R}$$

nazywamy ułamkiem prostym pierwszego rodzaju, a funkcję

$$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}, \quad n \in \mathbb{N},\ p, q, B, C \in \mathbb{R},\ \Delta = p^2 - 4q < 0$$

nazywamy ułamkiem prostym drugiego rodzaju.

Twierdzenie 6. (o rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste) *Każda funkcja wymierna właściwa jest sumą ułamków prostych. Jeżeli mianownik funkcji jest postaci*

$$Q(x) = a(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s},$$

to czynnikowi $(x-x_i)^{k_i}$ odpowiada suma k_i ułamków prostych postaci

$$\frac{A_1}{x-x_i} + \frac{A_2}{(x-x_i)^2} + \cdots \frac{A_{k_i}}{(x-x_i)^{k_i}},$$

a czynnikowi $(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}$ odpowiada suma l_j ułamków prostych postaci

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+p_jx+q_j} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+p_jx+q_j)^2} + \cdots + \frac{B_{l_j}x+C_{l_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}}.$$

Etapy rozkładu na ułamki proste
1. Napisz przewidywany rozkład na ułamki (kierując się rozkładem mianownika na czynniki)
2. Sprowadź te ułamki do wspólnego mianownika
3. Przyrównaj liczniki po obu stronach
4. — Eliminuj $A, B, C, \dots$ wybierając wartości dla x, lub
   — Uporządkuj liczniki według potęg x i przyrównaj współczynniki po obu stronach
5. Wylicz wartości $A, B, C, \dots$.

Jak napisać przewidywany rozkład na ułamki?
Czynniki jednokrotne:

$$\frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$$

Czynniki wielokrotne:

$$\frac{3x^2+x-1}{x(x-2)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3}$$

Trójmian nierozkladalny:

$$\frac{3x+4}{(x-2)(x^2+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+3}$$

Wielokrotny trójmian nierozkładalny:

$$\frac{x^3+x+4}{(x+5)(x^2+5)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+5} + \frac{Dx+E}{(x^2+5)^2}$$

Przykłady. Rozłożyć na ułamki proste

$$\frac{5x^2-4}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{1}{6}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{16}{3}\frac{1}{x+2},$$

$$\frac{x}{x^3+1} = -\frac{1}{3}\frac{1}{x+1} + \frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2-x+1},$$

$$\frac{x^2}{(x-2)^3(x+1)} = \frac{1}{27}\frac{1}{x-2} - \frac{8}{9}\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{4}{3}\frac{1}{(x-2)^3} - \frac{1}{27}\frac{1}{x-1}.$$

Z powyższych własności algebraicznych wynika, że całkowanie funkcji wymiernych można sprowadzić do całkowania ułamków prostych. Z ułamkami pierwszego rodzaju nie ma problemu:

1. dla $n=1$:
$$\int \frac{A}{x+a} = A\ln|x+a| + C;$$
2. dla $n>1$:
$$\int \frac{A}{(x+a)^n} = \frac{A}{(1-n)(x+a)^{1-n}} + C;$$

Ułamki drugiego rodzaju są trudniejsze. Dla $n=1$ należy:

1. wydzielić w liczniku pochodną mianownika: $Bx+C = \frac{B}{2}(2x+p) + (C - \frac{Bp}{2})$;
2. rozłożyć na sumę ułamków:
$$\frac{Bx+C}{x^2+px+q} = \frac{\frac{B}{2}(2x+p)}{x^2+px+q} + \frac{C-\frac{Bp}{2}}{x^2+px+q};$$
3. do pierwszego ułamka zastosować wzór $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$;
4. w drugim ułamku przedstawić licznik w postaci kanonicznej: $(x+\frac{p}{2})^2 - \frac{\Delta}{4}$ a następnie skorzystać ze wzoru
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+\frac{p}{2})^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+\frac{p}{2}}{a} + C, \quad \text{gdzie a} = \sqrt{-\frac{\Delta}{4}}$$

Przykład. $\int \frac{3x-1}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x$.

Ułamek drugiego rodzaju, gdzie $n>1$, całkujemy podobnie:

1. wydzielamy w liczniku pochodną mianownika: $Bx+C = \frac{B}{2}(2x+p) + (C-\frac{Bp}{2})$;
2. rozkładamy na sumę ułamków:
$$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n} = \frac{\frac{B}{2}(2x+p)}{(x^2+px+q)^n} + \frac{C-\frac{Bp}{2}}{(x^2+px+q)^n};$$
3. pierwszy ułamek całkujemy przez podstawienie $x^2+px+q=t$;
4. w drugim ułamku mianownik sprowadzamy do postaci kanonicznej: $(x+\frac{p}{2})^2 - \frac{\Delta}{4}$ a następnie korzystamy ze wzoru rekurencyjnego

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{n-1}}, \quad \text{gdzie a} = \sqrt{-\frac{\Delta}{4}}$$

1.5. Całkowanie funkcji trygonometrycznych

Będziemy rozpatrywali funkcje postaci $R(\sin x, \cos x)$, gdzie R jest funkcją wymierną dwóch zmiennych. Całki takich funkcji oblicza się przez odpowiednie podstawienie, które sprowadza całkę do całki funkcji wymiernej. Najbardziej ogólne jest tzw. *podstawienie uniwersalne*:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t.$$

Wtedy $x = 2\operatorname{arc\,tg} t$, więc

$$\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Ze wzorów trygonometrycznych otrzymujemy:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Przykład.

$$\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{2t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$$
$$= 2(t-\operatorname{arc\,tg} t)+C = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - x + C.$$

W przypadku całki postaci:

$$\int \sin^m x\cos^n x\,\mathrm{d}x, \quad m,n\in\mathbb{N}$$

sposób postępowania zależy od tego, czy m, n są parzyste, czy nie. Jeżeli np. $m=2k+1$, to:

$$\int \sin^m x\cos^n x\,\mathrm{d}x = \int \sin^{2k} x\cos^n x\sin x\,\mathrm{d}x,$$

i po podstawieniu $\cos x = t$ otrzymujemy $-\int(1-t^2)^k t^n\,\mathrm{d}t$. Analogicznie postępujemy, gdy n jest nieparzyste. Jeżeli zarówno m jak i n są nieparzyste, to korzystamy ze wzorów

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,$$

lub ze wzoru jedynkowego (a potem ewentualnie wzorów rekurencyjnych).
Natomiast całki:

$$\int \sin mx\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad \int \sin mx\sin nx\,\mathrm{d}x, \quad \int \cos mx\cos nx\,\mathrm{d}x$$

przekształcamy korzystając ze wzorów:

$$\sin mx\cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x],$$
$$\sin mx\sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x],$$
$$\cos mx\cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x].$$

1.6. Całkowanie pewnych funkcji niewymiernych

Funkcje zawierające pierwiastki (różnych stopni) mogą być bardzo skomplikowane. Dla rozmaitych typów istnieją podstawienia sprowadzające je do funkcji wymiernych.
Jeśli funkcja zawiera pierwiastki wyrażenia

$$\frac{ax+b}{cx+d}$$

to podstawiamy

$$\frac{ax+b}{cx+d} = z^n$$

gdzie n jest najmniejszą wspólną wielokrotnością stopni pierwiastków. Np. w całce

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$$

podstawiamy $x=z^6$, a w całce

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$$

podstawiamy $2x-1=z^4$.
Całki zawierające pierwiastek trójmianu kwadratowego można obliczać sprowadzając trójmian ax^2+bx+c do jednej z postaci
1. m^2-z^2,
2. m^2+z^2,
3. z^2-m^2,

a następnie stosować, odpowiednio, podstawienia
1. $z=m\sin t$ lub $z=m\operatorname{tgh} t$,
2. $z=m\operatorname{tg} t$ lub $z=m\sinh t$,

3. $z = m\frac{1}{\cos t}$ lub $z = m\cosh t$.

Przykład. Obliczyć
$$I = \int x\sqrt{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x.$$
Ponieważ
$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$
więc podstawimy
$$x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sinh t, \quad \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cosh t\,\mathrm{d}t$$
co prowadzi do całki
$$I = \frac{3}{8}\int \Big(-1+\sqrt{3}\sinh t\Big)\cosh^2 t\,\mathrm{d}t.$$
Całka nie jest specjalnie trudna. Po rachunkach otrzymujemy:
$$I = -\frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\sinh t\cosh t + \frac{1}{2}t\right) + \frac{3\sqrt{3}}{8}\frac{\cosh^3 t}{3} + C,$$
ale powrót do zmiennej x jest kłopotliwy. Wynik końcowy to:
$$I = \frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1} - \frac{3}{16}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right) + C.$$
Alternatywą jest podstawienie
$$x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg} t, \quad \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{2\cos t}\,\mathrm{d}t$$
co prowadzi do całki
$$I = \frac{3}{8}\int \big(-1+\sqrt{3}\operatorname{tg} t\big)\frac{1}{\cos^3 t}\,\mathrm{d}t.$$
Tak jak poprzednio, całka nie jest specjalnie trudna, ale powrót do zmiennej x jest kłopotliwy.