Maciej Grzesiak
Instytut Matematyki Politechniki Poznańskiej

Całki podwójne i potrójne

1. Definicja całki podwójnej po prostokącie

Definicja 1. *Podziałem prostokąta*

$$R = \{(x, y) : \ a \leqslant x \leqslant b, \ c \leqslant y \leqslant d\}$$

(inaczej: $R = [a, b] \times [c, d]$) nazywamy zbiór $\mathcal{P}$ złożony z prostokątów $R_1, R_2, \ldots, R_n$ które całkowicie go wypełniają i mają parami rozłączne wnętrza.

Niech Δx_k, Δy_k będą długościami boków prostokąta R_k, $d_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$ jego przekątną. *Średnicą podziału* $\mathcal{P}$ nazywamy liczbę:

$$\delta(\mathcal{P}) = \max\{d_k : \ 1 \leqslant k \leqslant n\}.$$

Niech (ξ_k, η_k) będzie dowolnie wybranym punktem prostokąta R_k.

Definicja 2. (suma całkowa funkcji po prostokącie) *Niech funkcja $f(x, y)$ będzie ograniczona na prostokącie R oraz niech $\mathcal{P}$ będzie podziałem tego prostokąta. Sumą całkową funkcji f nazywamy liczbę*

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k \Delta y_k.$$

Pojedyncze składniki powyższej sumy są objętościami prostopadłościanów, których podstawami są prostokąty R_k, a wysokościami $f(\xi_k, \eta_k)$.
Rozpatrując ciąg podziałów $(\mathcal{P}_n)$ i przechodząc do granicy dochodzimy do pojęcia całki:

Definicja 3. (całka podwójna funkcji po prostokącie) *Niech funkcja $f(x, y)$ będzie ograniczona na prostokącie R.* Całkę podwójną *funkcji f po prostokącie R określamy wzorem*

$$\iint\limits_R f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k \Delta y_k,$$

o ile ta granica jest właściwa.

Jeżeli całka istnieje, to mówimy, że funkcja jest całkowalna. Każda funkcja ciągła jest całkowalna.
Interpretacja geometryczna. Składnik $f(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k \Delta y_k$ sumy całkowej można interpretować jako objętość prostopadłościanu, którego podstawa jest prostokątem o wymiarach $\Delta x_k, \Delta y_k$ a wysokością jest $f(\xi_k, \eta_k)$.
Suma całkowa jest zatem przybliżeniem objętości bryły ograniczonej prostokątem R, powierzchnią $z = f(x, y)$ i ścianami bocznymi równoległymi do osi Oz. Całka, jako granica tych sum, jest (dokładną) objętością tej bryły.

Twierdzenie 1. (własności całki) *1.* $f(x, y) = 0 \Rightarrow \iint\limits_R f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 0$*;*

2. $\iint\limits_R (f(x, y) + g(x, y))\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint\limits_R f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \iint\limits_R g(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$*;*

3. jeżeli $R = R_1 \cup R_2$ *i* $R_1 \cap R_2 = \emptyset$*, to* $\iint\limits_R f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint\limits_{R_1} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \iint\limits_{R_2} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$*;*

4. $\iint\limits_R cf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

Twierdzenie 2. (obliczanie całki podwójnej) *Jeżeli* $R = \{(x,y):\ a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$ *jest prostokątem, to*

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

Całki występujące w twierdzeniu nazywamy *całkami iterowanymi.*
Ponieważ zapis jest nieco kłopotliwy, będziemy dalej pisali krócej:

$$\int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y, \qquad \int\limits_c^d \mathrm{d}y \int\limits_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Przykłady. Obliczyć całki
1. $\int\limits_1^2 \mathrm{d}x \int\limits_0^3 (x+xy^2)\,\mathrm{d}y;$
2. $\int\limits_0^3 \mathrm{d}y \int\limits_1^2 (x+xy^2)\,\mathrm{d}x;$
3. $\iint\limits_R \sin(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ R = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \times [0, \frac{\pi}{4}];$
4. $\iint\limits_R \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ R = [0,1] \times [0,1].$

2. Całka podwójna po obszarze normalnym

Definicja 4. Obszarem normalnym *względem osi Ox nazywamy obszar określony nierównościami*

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad g(x) \leqslant y \leqslant h(x),$$

dla pewnych stałych a, b *i funkcji* $g(x)$, $h(x)$.
Analogicznie, obszarem normalnym względem osi Oy nazywamy obszar określony nierównościami

$$c \leqslant y \leqslant d, \quad k(y) \leqslant x \leqslant l(y),$$

dla pewnych stałych c, d *i funkcji* $k(y)$, $l(y)$.

Definicja 5. *Jeżeli* $f(x,y)$ *jest funkcją określoną w obszarze* D *normalnym względem osi* Ox, *to całkę podwójną po obszarze* D *określamy następująco:*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Analogicznie, gdy D *jest obszarem normalnym względem osi* Oy, *to:*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_c^d \mathrm{d}y \int\limits_{k(y)}^{l(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Przykłady. Obliczyć całki
1. $\iint\limits_D xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, D ograniczony krzywymi $y = x$, $y = 2 - x^2$;
2. $\iint\limits_D x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, D ograniczony krzywymi $y = -2$, $y = \frac{1}{x}$, $y = -\sqrt{-x}$.

3. Zamiana zmiennych w całce podwójnej

Definicja 6. *Niech Δ i D będą obszarami na płaszczyznach Ouv i Oxy odpowiednio. Przekształceniem obszaru Δ w obszar D nazywamy funkcję*

$$T : \Delta \longrightarrow D, \quad T(u,v) = (x,y), \quad \text{gdzie } x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v).$$

Przykłady. Narysować obrazy $T(\Delta)$, gdy
1. $T(u,v) = (u+v, u-v)$, $\Delta = \{(u,v) :\ 0 \leqslant u \leqslant 1,\ 2 \leqslant v \leqslant 4\}$;
Obszar Δ jest prostokątem. Jego obraz łatwo rozpoznać wyznaczając obrazy wierzchołków. Np. $T(0,2) = (2,-2)$ itd. Zobaczymy, że $T(\Delta)$ to równoległobok.
2. $T(u,v) = (u\cos v, u\sin v)$, $\Delta = \{(u,v) :\ 0 \leqslant u \leqslant 2,\ 0 \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}\}$.
Obszar Δ jest także prostokątem. Jednak funkcje występujące w definicji T nie są liniowe, i sytuacja się komplikuje. Zobaczmy, jakie są obrazy boków prostokata.
Bok $u = 0, 2 \leqslant v \leqslant 4$ przechodzi w punkt (!) $(0,0)$.
Bok $u = 2, 2 \leqslant v \leqslant 4$ przechodzi w łuk okręgu $(2\cos v, 2\sin v)$.
Bok $0 \leqslant u \leqslant 2, v = 0$ przechodzi w odcinek $(0 \leqslant u \leqslant 2, 0)$.
Bok $0 \leqslant u \leqslant 2, v = \pi/2$ przechodzi w odcinek $(0, 0 \leqslant u \leqslant 2)$.
Tym razem $T(\Delta)$ to ćwiartka koła.

Definicja 7. Jakobianem *przekształcenia $T(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$ nazywamy funkcję:*

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial\psi}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\psi}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}$$

Inne oznaczenia jakobianu:

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)} \quad \text{lub} \quad \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}$$

Dla przekształcenia z przykładu 1:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

a dla przekształcenia z przykładu 2:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u$$

Twierdzenie 3. *Jeżeli*
1. *$T : \Delta \to D$, $T(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$ przekształca wzajemnie jednoznacznie wnętrze obszaru Δ na wnętrze obszaru D;*
2. *funkcje φ, ψ mają ciągłe pochodne cząstkowe;*
3. *funkcja $f(x,y)$ jest ciągła na D;*
4. *jakobian $J(u,v)$ jest różny od 0 wewnątrz obszaru Δ,*

to

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_\Delta f(\varphi(u,v), \psi(u,v))|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Najczęściej stosujemy zamianę na współrzędne biegunowe, czyli:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi.$$

Wtedy (sprawdzić!):

$$J(\rho,\varphi) = \rho,$$

a więc

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_\Delta f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi.$$

Przykłady. Obliczyć całki zamieniając współrzędne na biegunowe:
1. $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, gdy D jest określony warunkami $x^2+y^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.
Rozwiązanie: We współrzędnych na biegunowych obszar określają nierówności $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, więc

$$\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_\Delta \ln(1+\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \ln(1+\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{4}(2\ln 2 - 1).$$

2. $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, gdy D jest określony warunkiem $x^2+y^2 \leqslant R^2$.
Odp.: $\frac{2}{3}\pi R^3$ (objętość półkuli).
3. $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, gdy D jest określony warunkami $x^2+y^2-Rx \leqslant 0$, $y \geqslant 0$.
Odp.: $\frac{R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$.

4. Zastosowania całki podwójnej

Pole obszaru D obliczamy ze wzoru:

$$P = \iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_\Delta \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi,$$

gdzie Δ jest obszarem opisanym we współrzędnych biegunowych.

Przykłady. Obliczyć pola:
1. D jest obszarem między krzywymi $y = x^2 - 8x + 20$, $y = x + 2$;
2. D jest obszarem ograniczonym lemniskatą $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$ (zamienić współrzędne na biegunowe);
Równanie biegunowe lemniskaty to $\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$, a więc

$$P = 4\int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\varphi \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \rho\,\mathrm{d}\rho = 4\int_0^{\pi/4} a^2\cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi =$$

3. D jest obszarem ograniczonym krzywymi $x^2+(y-2)^2 = 4$, $y = x$, $(y \leqslant x)$ (zamienić współrzędne na biegunowe).
Odp.: $\pi - 2$.
Objętość bryły ograniczonej obszarem $D \subset Oxy$, powierzchnią $z = f(x,y)$ i prostymi równoległymi do osi Oz obliczamy ze wzoru:

$$P = \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Przykłady. Obliczyć objętości brył:
1. ograniczonej płaszczyznami $z = 5 - 2x - y$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. (odp.: $125/12$)
2. ograniczonej powierzchniami $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 0$. (odp.: 8π)
3. wyznaczonej przez powierzchnie $x^2+z^2 = 1$, $x+y = 1$, $z = 0$, $y = 0$, przy czym $y, z \geqslant 0$;
Uwaga: w rachunkach skorzystać ze wzoru

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

4. wyciętej walcem $x^2+y^2 = Rx$ z kuli $x^2+y^2+z^2 = R^2$;
Odp.: $\frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$.

5. ograniczonej stożkiem $x^2+y^2=z^2$ i paraboloidą $x^2+y^2=6-z$, $(z \geqslant 0)$.

$$V=\iint\limits_{D}(6-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2\rho(6-\rho^2-\rho)\,\mathrm{d}\rho=\frac{32}{3}\pi.$$

Przy pomocy całki podwójnej można obliczać również **pole płata powierzchni**. Jeżeli $z=f(x,y)$ jest powierzchnią w przestrzeni, to pole jej płata leżącego nad obszarem $D\subset Oxy$ wyraża się wzorem

$$S=\iint\limits_{D}\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Przykłady. Obliczyć pole powierzchni:
1. wyciętej walcem $x^2+y^2=Rx$ ze sfery $x^2+y^2+z^2=R^2$
Odp.: $S=2R^2(\pi-2)$;
2. wyciętej walcem $x^2+y^2=R^2$ ze stożka $y^2+z^2=x^2$.
Odp.: $2\pi R^2$.

5. Definicja całki potrójnej

Obszarem normalnym Ω w przestrzeni nazywamy obszar ograniczony od dołu powierzchnią $z=p(x,y)$, od góry powierzchnią $z=q(x,y)$, a po bokach powierzchnią walcową o tworzących równoległych do osi Oz. Rzutem tego obszaru na płaszczyznę Oxy jest obszar płaski D. Wtedy całkę potrójną po Ω określamy wzorem

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint\limits_{D}\left(\int\limits_{p(x,y)}^{q(x,y)}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right).$$

Jeśli obszar D jest normalny np.

$$a\leqslant x\leqslant b,\quad g(x)\leqslant y\leqslant h(x),$$

to

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int\limits_a^b\mathrm{d}x\int\limits_{g(x)}^{h(x)}\mathrm{d}y\int\limits_{p(x,y)}^{q(x,y)}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

Przykłady. Obliczyć całki potrójne
1. $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, Ω ograniczony płaszczyznami $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=a$, $y=b$, $z=c$;
2. $\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, Ω ograniczony płaszczyznami $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

Definicja 8. *Niech Ω' i Ω będą obszarami w przestrzeniach $Ouvw$ i $Oxyz$ odpowiednio. Przekształceniem obszaru Ω' w obszar Ω nazywamy funkcję*

$$T:\Omega'\longrightarrow\Omega,\quad T(u,v,w)=(x,y,z),$$

gdzie

$$x=\varphi(u,v,w),\ y=\psi(u,v,w),\ z=\chi(u,v,w).$$

Definicja 9. Jakobianem *przekształcenia $T(u,v,w)=(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w))$ nazywamy funkcję:*

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial\varphi}{\partial w}(u,v,w)\\ \frac{\partial\psi}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial\psi}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial\psi}{\partial w}(u,v,w)\\ \frac{\partial\chi}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial\chi}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial\chi}{\partial w}(u,v,w)\end{vmatrix}$$

Twierdzenie 4. *Jeżeli*

1. *$T : \Omega' \to \Omega$, $T(u,v,w) = (\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w)\chi(u,v,w))$ przekształca wzajemnie jednoznacznie wnętrze obszaru Ω' na wnętrze obszaru Ω;*
2. *funkcje φ, ψ, χ mają ciągłe pochodne cząstkowe;*
3. *funkcja $f(x,y,z)$ jest ciągła na Ω;*
4. *jakobian $J(u,v,w)$ jest różny od 0 wewnątrz obszaru Ω',*

to

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega'} f(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \chi(u,v,w))|J(u,v,w)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w.$$

Często stosujemy zamianę na **współrzędne walcowe**: punktowi P przyporządkowujemy liczby ρ, φ, h, gdzie ρ, φ są współrzędnymi biegunowymi rzutu punktu P na płaszczyznę Oxy, a h jest odległością punktu P od płaszczyzny Oxy. Mamy zatem związki:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = h,$$

Również często stosujemy zamianę na **współrzędne sferyczne**: punktowi P przyporządkowujemy liczby r, φ, θ, gdzie r jest promieniem wodzącym punku P, tj. jego odległością od początku układu, φ jest takie samo jak we współrzędnych biegunowych, a θ jest kątem jaki wektor $\overrightarrow{OP}$ tworzy z dodatnią półosią Oz (kąt θ spełnia warunek $\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$). Zatem:

$$x = r\cos\varphi\sin\theta,\ y = r\sin\varphi\sin\theta, z = r\cos\theta.$$

Wtedy dla współrzędnych walcowych mamy:

$$J(\rho,\varphi,h) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho,$$

a więc

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, h)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}h.$$

Natomiast dla współrzędnych sferycznych jakobian wynosi:

$$J(r,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} = r^2\sin\theta,$$

więc

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega'} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta.$$

Przykłady. 1. Obliczyć całkę zamieniając współrzędne na walcowe:

$$\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Ω jest określony warunkami $0 \leqslant x \leqslant 4$, $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4x - x^2}$, $0 \leqslant z \leqslant 2$. Odp. $\frac{256}{9}$.
2. Obliczyć całkę zamieniając współrzędne na sferyczne:

$$\iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Ω jest określony warunkami $1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4$, $z \geqslant 0$. Odp. $\frac{124}{15}\pi$.