1. Funkcja użyteczności

Funkcja użyteczności to funkcja, której wartościami są wartości użyteczności (satysfakcji, komfortu psychicznego). Można mówić o użyteczności różnych zjawisk. Użyteczność pieniądza (bogactwa) jest np. funkcją, która wartości pieniężnej przyporządkowuje użyteczność dla otrzymującego tę wartość. Funkcja użyteczności jest pojęciem psychologicznym, co oznacza, że każdy ma swoją funkcję użyteczności. Jednak pewne ogólne własności są wspólne. Mianowicie, ponieważ każdy woli posiadać więcej niż mniej, więc funkcja użyteczności jest rosnąca. Ponadto krańcowa użyteczność jest malejąca, tzn. każdy dodatkowy procent wzrostu bogactwa powoduje coraz mniejszy przyrost użyteczności.
Przykładowo, ktoś kto nic nie ma, podejmie wysiłek w celu zarobienia 10 zł, bo ta kwota zapewni mu np. posiłek. Dla osoby bogatej ta kwota będzie prawie bez znaczenia.

Definicja 1. Funkcja użyteczności $u(x)$ jest funkcją spełniającą warunki:

$$u'(x) > 0,\ u''(x) < 0,$$

i określającą użyteczność posiadania przez osobę/instytucję wartości (pieniężnej) x.

Mówimy, że funkcja użyteczności ma własność *nienasycenia* (ang.: non-satiation) i *awersji do ryzyka* (risk aversion).
W dalszym ciągu będziemy mówić o użyteczności zysków z inwestycji. Inwestycja (pieniężna, w formie pracy, w postaci przekazania dobra, itp.) zawsze wiąże się z pewnym ryzykiem, a zyski z niej można oceniać z pewnym prawdopodobieństwem.
Zasada maksymalizacji użyteczności. *Racjonalny inwestor mając do wyboru różne możliwości inwestycji wybierze tę, która maksymalizuje jego oczekiwaną użyteczność bogactwa.*
Bardziej formalnie, niech $X(I)$ będzie zmienną losową określającą wartość końcową inwestycji I, gdzie $I \in F$ (F jest zbiorem możliwości inwestycyjnych). Jeżeli u jest funkcją użyteczności inwestora, to szuka on inwestycji $I_o \in F$ dla której

$$\mathrm{E}(u(X(I_o))) = \max_{I \in F} \mathrm{E}(u(X(I))).$$

Przykład. Rozważmy zachowanie inwestora z funkcją użyteczności $u(x) = \sqrt{x}$ (jest to funkcja rosnąca i wklęsła, więc spełnia warunki definicji). Załóżmy, że może on zainwestować 5 zł w przedsięwzięcie, które z prawdopodobieństwem 1/2 da zysk 4 zł lub stratę 4 zł (wartość oczekiwana zysku wynosi 0).
Inwestor ma alternatywę: inwestować lub nic nie robić.
Jeżeli nic nie zrobi, będzie miał 5 zł. Użyteczność tej kwoty to $u(5) = 2{,}24$. Jeżeli zainwestuje, to oczekiwany wynik finansowy to $\frac{1}{2} \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 5$, ale oczekiwana użyteczność to $\frac{1}{2} \cdot u(9) + \frac{1}{2} \cdot u(1) = 2$. Inwestycja nie jest opłacalna.
Jak można się zorientować, inwestor odrzuci każdą inwestycję, dla której wartość oczekiwana zysku wynosi 0. Wtedy bowiem oczekiwana użyteczność zmaleje (wynika to z wklęsłości funkcji użyteczności).
Ale jeśli wartość oczekiwana zysku jest dodatnia, to sytuacja może być inna. Gdyby w powyższym przykładzie prawdopodobieństwo zysku wynosiło $\frac{3}{4}$, a straty $\frac{1}{4}$, to wartość oczekiwana zysku wynosiłaby $\frac{3}{4} \cdot 4 - \frac{1}{4} \cdot 4 = 2$, oczekiwany wynik finansowy to $\frac{3}{4} \cdot 9 + \frac{1}{4} \cdot 1 = 7$, a oczekiwana użyteczność to $\frac{3}{4} \cdot u(9) + \frac{1}{4} \cdot u(1) = 2{,}5$. Warto zaryzykować.
Z psychologicznego punktu widzenia każdy "normalny" człowiek przywiązuje większą wagę do straty niż do zysku w tej samej wielkości. Funkcja użyteczności wyjaśnia to zjawisko, bo w powyższym przykładzie strata 4 zł oznacza zmniejszenie użyteczności o 1,24, a zysk 4 zł to zwiększenie użyteczności tylko o 0,76.
W przykładzie oczekiwana użyteczność wynosi 2. Wartość zamożności o tej samej użyteczności to 4. Nazywany to *równoważną wartością pewną*.

Definicja 2. *Równoważną wartością pewną* inwestycji, której wynik jest określony zmienną losowa X jest taka wartość c, że

$$u(c) = \mathrm{E}(u(X)).$$

Gdyby przyjąć zamiast funkcji $u(x) = \sqrt{x}$ funkcję $v(x) = 10\sqrt{x}$, czy $w(x) = \sqrt{x} + 37$, to wszystkie istotne wyniki byłyby takie same. Wykres funkcji zasadniczo byłby taki sam, jedynie nastąpiłaby zmiana skali bądź przesunięcie.
Przekształcenie afiniczne funkcji użyteczności. Wprowadzimy bardziej formalne określenia. Niech $a > 0$ i b będą stałymi, a u funkcją użyteczności. Określamy inną funkcję użyteczności:

$$v(x) = au(x) + b.$$

Jest to rzeczywiście funkcja użyteczności, bo $v'(x) = au'(x) > 0$ i $v''(x) = au''(x) < 0$.
Ponadto, jeśli c jest takie, że $u(c) = \mathrm{E}(u(X))$, to $v(c) = au(c) + b = a\mathrm{E}(u(X)) + b = \mathrm{E}(v(X))$. Równoważna wartość pewna jest taka sama dla obu funkcji.
Zatem dwie funkcje użyteczności różniące się jedynie dodatnim przekształceniem afinicznym można utożsamiać.
Przykład. Załóżmy, że inwestor ma 100 zł, a jego funkcja użyteczności to

$$u(x) = -\frac{10^6}{x^3}.$$

Z poprzednich uwag wiadomo, że czynnik 10^6 nie ma znaczenia (taką samą funkcją użyteczności byłaby $u(x) = -\frac{1}{x^3}$). Ale dzięki niemu liczby są wygodniejsze.
Załóżmy dalej, że jedyną alternatywą do "nicnierobienia" jest nabycie (za całość kwoty) inwestycji dającej zysk 20% z prawdopodobieństwem 1/2 i stratę 10% z prawdopodobieństwem 1/2.
Wartość oczekiwana stanu posiadania X wynosi

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2} \cdot 120 + \frac{1}{2} \cdot 90 = 105,$$

drugi moment

$$\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{2} \cdot 120^2 + \frac{1}{2} \cdot 90^2 = 225 \cdot 50,$$

a odchylenie standardowe

$$\sigma(X) = \sqrt{225 \cdot 50 - 105^2} = 15.$$

Oczekiwana użyteczność wynosi

$$\mathrm{E}(u(X)) = \frac{1}{2}u(120) + \frac{1}{2}u(90) = -0{,}98$$

a użyteczność "nicnierobienia" to $u(100) = -1$. Inwestycja jest więc minimalnie opłacalna.
Gdybyśmy jednak zmienili wykładnik, np. przyjęli funkcję użyteczności:

$$u(x) = -\frac{10^{10}}{x^5}.$$

to wyniki byłyby inne: oczekiwana użyteczność tym razem to

$$\mathrm{E}(u(X)) = \frac{1}{2}u(120) + \frac{1}{2}u(90) = -1{,}05$$

czyli inwestycja stała się nieopłacalna.
Optymalizacja portfela inwestycji. Przyjmijmy, że inwestor może chcieć zainwestować tylko część pieniędzy. Przeprowadzimy analizę dla ogólniejszej funkcji użyteczności

$$u_\lambda(x) = \frac{x^\lambda - 1}{\lambda}, \quad \lambda < 1,\ \lambda \neq 0. \tag{1}$$

Warunek $\lambda < 1$ jest konieczny aby funkcja była wklęsła.
Zauważmy, że poprzednie funkcje to $u_{0,5}$, u_{-3}, u_{-5}.
Inwestor ma 100 zł. Zamierza α zł zainwestować (w to samo przedsięwzięcie co wyżej: zysk 20% z prawdopodobieństwem 1/2 i stratę 10% z prawdopodobieństwem 1/2), a $100 - \alpha$ zostawić. Zatem będzie miał:
— w złym przypadku: $x = 0{,}9\alpha + (100 - \alpha) = 100 - 0{,}1\alpha$;
— w dobrym przypadku: $x = 1{,}2\alpha + (100 - \alpha) = 100 + 0{,}2\alpha$
Oczekiwana użyteczność jest funkcją zmiennej α:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2}u(100-0{,}1\alpha)+\frac{1}{2}u(100+0{,}2\alpha) = \frac{0{,}5}{\lambda}[(100-0{,}1\alpha)^\lambda+(100+0{,}2\alpha)^\lambda-2]$$

Aby wyznaczyć maksimum obliczmy miejsce zerowe pochodnej $f'(\alpha)$.

$$f'(\alpha) = \frac{1}{2}\big(- 0,1(100 - 0,1\alpha)^{\lambda-1} + 0,2(100 + 0,2\alpha)^{\lambda-1}\big)$$

Otrzymujemy warunek:

$$\Big(\frac{100 + 0{,}2\alpha}{100 - 0{,}1\alpha}\Big)^{1-\lambda} = 2. \tag{2}$$

Wykładnik $1 - \lambda$ oznaczamy A i nazywamy *współczynnikiem awersji do ryzyka.*
Ponieważ $\lambda < 1$ oraz $\lambda \neq 0$, więc $A > 0$, $A \neq 1$.
Rozwiązując równanie otrzymujemy

$$\alpha = \frac{1000(2^{1/A} - 1)}{2 + 2^{1/A}}.$$

Gdy awersja do ryzyka A rośnie, to α (część inwestowana) maleje.
Jaki współczynnik awersji do ryzyka ma inwestor, który decyduje się zaangażować całość kapitału? Wtedy $\alpha = 100$, a więc $A = \log_{4/3} 2 = A_0 \approx 2,41$. Jeżeli inwestor ma jeszcze mniejszy współczynnik awersji do ryzyka, to $\alpha > 100$, np. gdy $A = 2$, to mamy $\alpha \approx 121,32$. Oznacza to, że inwestor powinien pożyczyć brakującą kwotę (o ile może uzyskać pieniądze bez płacenia oprocentowania), zainwestować, a po zakończeniu inwestycji zwrócić pożyczkę. W takiej sytuacji mówimy o *lewarowaniu* (dźwigni finansowej).
Inwestor, dla którego $A < A_0$ powinien stosować lewarowanie.
Potęgowa funkcja użyteczności określona wzorem (**??**) nie ma sensu dla $\lambda = 0$.
Ale ponieważ

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{x^\lambda - 1}{\lambda} = \ln x$$

więc zasadne jest rozważenie logarytmicznej funkcji użyteczności.
Niech więc $u(x) = \ln x$. Współczynnik awersji do ryzyka takiego inwestora to $A = 1$ (bo $\lambda = 0$). Dla tej funkcji oczekiwana użyteczność wynosi:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2}\ln(100 - 0{,}1\alpha) + \frac{1}{2}\ln(100 + 0{,}2\alpha),$$

$$f'(\alpha) = \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{1000 + 2\alpha} - \frac{1}{1000 - \alpha}\Big),$$

$$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 250.$$

Maksimum osiągamy dla $\alpha = 250$. A więc inwestor dla którego $A = 1$ charakteryzuje się bardzo niską awersją do ryzyka i stosuje duże lewarowanie.
Można zadać pytanie, czy w przypadku dysponowania inną kwotą (np. 200 zł) proporcja części inwestowanej i "bezpiecznej" byłaby taka sama. Dokładniej: czy przy zmianie skali bogactwa funkcja użyteczności będzie taka sama (z dokładnością do przekształcenia afinicznego), a więc czy

$$u(kx) = f(k)u(x) + g(k).$$

gdzie $f(k) > 0$. Funkcję użyteczności spełniającą ten warunek nazywamy *izoelastyczną.*

Zarówno $u(x) = \frac{x^\lambda - 1}{\lambda}$ jak i $u(x) = \ln x$ są izoelastyczne: dla pierwszej funkcji mamy

$$u(kx) = k^\lambda u(x) + \frac{k^\lambda - 1}{\lambda}$$

a dla drugiej

$$u(kx) = u(x) + \log k.$$

Izoelastyczność to istotna własność ułatwiająca planowanie portfela inwestycji, bo jeśli jakiś procentowy podział jest ustalony dla pewnego poziomu bogactwa, to taki sam będzie słuszny dla innego poziomu.

Wykładnicza funkcja użyteczności

Nie należy zakładać, że każdy inwestor ma izoelastyczną funkcję użyteczności. Niech

$$u(x) = -e^{-ax}.$$

Parametr a mierzy awersję ubezpieczyciela do ryzyka.

Tego typu funkcje mają własność niezmienniczości ze względu na przesunięcia, tzn.

$$u(x + k) = f(k)u(x) + g(k),$$

dla pewnych funkcji $f(k) > 0$ i $g(k)$, niezależnych od x.

Łatwo to sprawdzić:

$$u(x + k) = -e^{-a(x+k)} = -e^{-ka}e^{-ax} = -e^{-ka}u(x).$$

Dla przykładu rozpatrywanego wyżej, gdy początkowe bogactwo wynosi x_0, to

$$f(\alpha) = -\frac{1}{2}\Big(e^{-a(1-0{,}1\alpha)x_0} + e^{-a(1+0{,}2\alpha)x_0}\Big),$$

więc $f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\ln 2}{0{,}3} \cdot \frac{1}{ax_0} \approx \frac{2{,}31}{ax_0}$.

Przyjmijmy, dla uproszczenia liczb, że $a = 0,00231$. Wtedy $\alpha = \frac{1000}{x_0}$. A więc, gdy $x_0 = 1000$, to $\alpha = 1 = 100\%$. Gdy $x_0 = 2000$, $\alpha = 50\%$. Niezależnie od wyjściowego bogactwa kwota inwestycji jest zawsze równa 1000.

Ogólniej: $\alpha x_0 = \frac{2{,}31}{a}$ =const.

Zastosowanie funkcji użyteczności do kalkulacji składek.

Załóżmy, że ubezpieczyciel ma wykładniczą funkcję użyteczności:

$$u(x) = \frac{1}{a}(1 - e^{-ax}),$$

gdzie parametr a mierzy awersję ubezpieczyciela do ryzyka.

Dla danej polisy ubezpieczeniowej określamy *całkowitą stratę ubezpieczyciela* L, jako różnicę między teraźniejszą wartością wypłat a teraźniejszą wartością składek. Strata jest rozumiana algebraicznie — w szczególności może być ujemna.

Składkę nazywamy składką netto, jeśli spełnia zasadę równoważności:

$$\mathrm{E}(L) = 0.$$

Po uwzględnieniu funkcji użyteczności warunek $\mathrm{E}(L) = 0$ zostaje zastąpiony warunkiem:

$$\mathrm{E}(u(-L)) = u(0).$$

Oznacza to, że składka jest teraz wyznaczana tak, aby oczekiwana strata użyteczności była równa 0.

Przykładowo, dla powyższej funkcji użyteczności mamy:

$$\mathrm{E}\Big(\frac{1}{a}(1 - e^{aL})\Big) = 0,$$

$$\frac{1}{a}\Big(\mathrm{E}(1) - \mathrm{E}(e^{aL})\Big) = 0,$$

$$\mathrm{E}(e^{aL}) = 1.$$