1. Renty wieczyste

Rozważymy nieskończony strumień płatności i obliczymy jego wartość teraźniejszą.

Najpierw rozważmy rentę wieczystą polegającą na wypłacie 1 j.p. co rok. Jeśli pierwsza płatność jest w chwili 0, to mówimy o *rencie płatnej z góry* (ang. *perpetuity due*). Jej wartość teraźniejszą ozn. $\ddot{a}_{\overline{\infty}|}$. Zatem

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = 1 + v + v^2 + \cdots = \frac{1}{1-v} = \frac{1}{d}$$

gdzie $v = \frac{1}{1+r}$ jest czynnikiem dyskontującym. Jeżeli pierwsza płatność ma miejsce na koniec pierwszego roku, to renta jest *płatna z dołu* (ang. *immediate perpetuity*). Jej wartość teraźniejszą ozn. $a_{\overline{\infty}|}$:

$$a_{\overline{\infty}|} = v + v^2 + \cdots = \frac{v}{1-v},$$

ale

$$\frac{v}{1-v} = \frac{1}{(1+r)(1-\frac{1}{1+r})} = \frac{1}{1+r-1} = \frac{1}{r},$$

więc $a_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{r}$.

Rozważmy teraz renty, gdzie kwota $\frac{1}{m}$ jest wypłacana m razy do roku. Jeśli płatność jest z góry (pierwsza wypłata w chwili 0), to ozn. $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|}$ oraz

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m}v^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}v^{\frac{2}{m}} + \cdots = \frac{1}{m}\frac{1}{1-v^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{d^{(m)}},$$

bo $\frac{d^{(m)}}{m} = 1 - v^{\frac{1}{m}}$.[1]

Jeżeli płatności są z dołu, to oznaczamy $a^{(m)}_{\overline{\infty}|}$ oraz

$$\begin{aligned} a^{(m)}_{\overline{\infty}|} &= \frac{1}{m}v^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}v^{\frac{2}{m}} + \frac{1}{m}v^{\frac{3}{m}} + \cdots = \\ &= \frac{1}{m}\frac{v^{\frac{1}{m}}}{1-v^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{m}\frac{1}{v^{-\frac{1}{m}}-1} = \frac{1}{m}\frac{1}{(1+r)^{\frac{1}{m}}-1} = \\ &= \frac{1}{m[\frac{r^{(m)}}{m}+1-1]} = \frac{1}{r^{(m)}}. \end{aligned}$$

Otrzymane wyżej równości:

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d^{(m)}},\ a^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{r^{(m)}},$$

i oczywisty fakt, że oba rodzaje rent różnią się tylko płatnością w chwili 0, daje znaną już równość

$$\frac{1}{d^{(m)}} = \frac{1}{r^{(m)}} + \frac{1}{m}.$$

Rozważmy teraz rentę wypłacaną w sposób ciągły (wartość renty 1, początek wypłat w chwili 0). Jej wartość teraźniejszą oznaczmy $\overline{a}_{\overline{\infty}|}$. Wypłatę dt w chwili t należy zdyskontować czynnikiem $e^{-\delta t}$ (bo czynnik pomnażający dla jednego roku to e^{δ}), więc mamy

$$\overline{a}_{\overline{\infty}|} = \int_0^\infty e^{-\delta t}dt = \frac{1}{\delta}.$$

[1] Przypominamy zależność

$$\frac{1}{1-\frac{d^{(m)}}{m}} = 1 + \frac{r^{(m)}}{m} = (1+r)^{\frac{1}{m}} = v^{-\frac{1}{m}}.$$

To samo otrzymamy obliczając

$$\bar{a}_{\overline{\infty}|} = \lim_{m\to\infty} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{d^{(m)}} = \frac{1}{\delta},$$

lub

$$\bar{a}_{\overline{\infty}|} = \lim_{m\to\infty} a^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{r^{(m)}} = \frac{1}{\delta}.$$

Rozważmy teraz pewną rentę wieczystą (z góry), w której mamy rosnący ciąg płatności. Renta ta będzie określona dwoma parametrami:
— m — liczba płatności w roku;
— q — liczba podwyżek w roku (zakładamy, że $q|m$).
Np. dla $m = 12$ i $q = 4$ płatności są dokonywane miesięcznie, a podwyższane — co kwartał. Ogólnie, płatności takiej rosnącej renty są dokonywane wg schematu:

Czas				Płatność
0	$\frac{1}{m}$	$\dots$	$\frac{1}{q}-\frac{1}{m}$	$\frac{1}{mq}$
$\frac{1}{q}$	$\frac{1}{q}+\frac{1}{m}$	$\dots$	$\frac{2}{q}-\frac{1}{m}$	$\frac{2}{mq}$
$\frac{2}{q}$	$\frac{2}{q}+\frac{1}{m}$	$\dots$	$\frac{3}{q}-\frac{1}{m}$	$\frac{3}{mq}$
$\frac{3}{q}$	$\frac{3}{q}+\frac{1}{m}$	$\dots$	$\frac{4}{q}-\frac{1}{m}$	$\frac{4}{mq}$
$\dots\dots\dots$				$\dots$

W szczególności, w pierwszym roku ostatnie $\frac{m}{q}$ płatności (czas od $\frac{q-1}{q}$ do $1-\frac{1}{m}$) wynoszą $\frac{q}{mq} = \frac{1}{m}$. Ogólniej, w k-tym roku ostatnie $\frac{m}{q}$ płatności wynoszą $\frac{k}{m}$. Oznaczamy wartość teraźniejszą takiej rosnącej renty przez $(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{\infty}|}$. Można obliczyć jej wartość przedstawiając ją jako sumę rent stałych (wysokość $\frac{1}{mq}$, płatność m razy w roku) rozpoczynających się w momentach czasu $0, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \dots$. Zatem (wartość rocznej wpłaty to $\frac{1}{q}$):

$$\begin{aligned}(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{\infty}|} &= \frac{1}{q}\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|}[1 + v^{1/q} + v^{2/q} + \cdots] = \\ &= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|} \cdot \ddot{a}^{(q)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d^{(m)}} \cdot \frac{1}{d^{(q)}}.\end{aligned}$$

Odpowiednia renta płatna z dołu różni się tylko tym, że każda wpłata jest dokonywana $\frac{1}{m}$-tą roku później, więc

$$(I^{(q)}a)^{(m)}_{\overline{\infty}} = v^{\frac{1}{m}} \left((I^{(q)}\ddot{a})\right)^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{d^{(m)}} \cdot \frac{1}{d^{(q)}} = \frac{1}{r^{(m)}} \frac{1}{d^{(q)}},$$

bo $d^{(m)} = v^{\frac{1}{m}} r^{(m)}$.

Indeks górny 1 zawsze opuszczamy. Np. wartość teraźniejsza renty płatnej z góry z rocznymi płatnościami $1, 2, \dots$, to

$$(I\ddot{a})_{\overline{\infty}|} = (I^{(1)}\ddot{a})^{(1)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d^2}.$$

Równości

$$(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d^{(m)}} \cdot \frac{1}{d^{(q)}}, \quad (I^{(q)}a)^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{r^{(m)}} \cdot \frac{1}{d^{(q)}}$$

można wykorzystać (przechodząc z $m \to \infty$) do obliczenia wartości teraźniejszych ciągłych strumieni płatności. Np. (uwaga: $[x]$ oznacza całość z x):

$$(\bar{I}\bar{a})_{\overline{\infty}|} = \int_0^\infty te^{-\delta t}dt = \frac{1}{\delta^2} \quad ,(I\bar{a})_{\overline{\infty}|} = \int_0^\infty [t+1]e^{-\delta t}dt = \frac{1}{\delta d},$$

przy czym wyniki końcowe uzyskujemy bez liczenia całek. (Należy uwzględnić, że $\lim_{m\to\infty} \frac{1}{d^{(m)}} = \frac{1}{\delta}$ oraz, że $\frac{1}{d^{(1)}} = \frac{1}{d}$).

Na koniec rozważmy rentę wypłacającą kwoty $r_0, r_1, r_2, \dots$ (w chwilach $0, 1, 2, \dots$). Jej wartość teraźniejsza $\ddot{a}$ wynosi:

$$\ddot{a} = r_0 + vr_1 + v^2 r_2 + \cdots .$$

Taka zmienna renta może być rozważana jako suma stałych rent, według schematu

Doroczna płatność	Moment startu
r_0	0
$r_1 - r_0$	1
$r_2 - r_1$	2
...	...

Jej wartość teraźniejszą możemy więc zapisać jako

$$\ddot{a} = \frac{1}{d}[r_0 + v(r_1 - r_0) + v^2(r_2 - r_1) + \cdots].$$

Taka postać bywa przydatna, gdy różnice są prostsze niż same r_k; tak jest np. wtedy, gdy r_k jest wielomianem zmiennej k. Np. gdy $r_k = k+1$, to możemy otrzymać znany już wzór

$$(I\ddot{a})_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d}(1 + v + v^2 + \cdots) = \frac{1}{d}\frac{1}{1-v} = \frac{1}{d^2}.$$

Czasem jest łatwiej wyliczyć wartość teraźniejszą bezpośrednio. Jeżeli np.

$$r_k = e^{\tau k}, \ \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

to

$$\begin{aligned} \ddot{a} &= 1 + ve^{\tau} + v^2 e^{2\tau} + \cdots = \\ &= \frac{1}{1 - ve^{\tau}} = \frac{1}{1 - e^{-\delta}e^{\tau}} = \frac{1}{1 - e^{-(\delta-\tau)}}, \end{aligned}$$

pod warunkiem, że $\tau < \delta$.

2. Renty terminowe

Rentą terminową (ang. *annuity*) nazywamy ciąg płatności z ograniczonym czasem trwania n. Wartość teraźniejszą renty terminowej płatnej z góry, w wysokości 1, oznaczamy $\ddot{a}_{\overline{n}|}$. Zatem

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{d}.$$

Wynik ten można uzyskać traktując tę rentę jako różnicę dwóch rent wieczystych (jedna zaczyna się dla $t = 0$, druga dla $t = n$):

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{\infty}|} - v^n \ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1 - v^n}{d}.$$

Podobnie uzyskamy:

$$\begin{aligned} a_{\overline{n}|} &= \frac{1 - v^n}{r}, \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} &= \frac{1 - v^n}{d^{(m)}}, \\ a^{(m)}_{\overline{n}|} &= \frac{1 - v^n}{r^{(m)}}. \end{aligned}$$

W przypadku rent terminowych interesująca jest również ich wartość przyszła (końcowa). Wartość przyszłą uzyskamy mnożąc wartość teraźniejszą przez $(1 + r)^n = \frac{1}{v^n}$. Stąd

$$\begin{aligned} \ddot{s}_{\overline{n}|} &= \frac{(1 + r)^n - 1}{d}. \\ s_{\overline{n}|} &= \frac{(1 + r)^n - 1}{r}, \end{aligned}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{(1+r)^n - 1}{d^{(m)}},$$

$$s_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{(1+r)^n - 1}{r^{(m)}}.$$

Mamy także zależność

$$\begin{aligned}\frac{1}{s_{\overline{n}|}} + r &= \frac{r}{\upsilon^{-n} - 1} + r = r\left(\frac{1}{\upsilon^{-n} - 1} + \frac{\upsilon^{-n} - 1}{\upsilon^{-n} - 1}\right) = \\ &= \frac{r\upsilon^{-n}}{\upsilon^{-n} - 1} = \frac{r}{1 - \upsilon^n} = \frac{1}{a_{\overline{n}|}},\end{aligned}$$

czyli

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|}} = \frac{1}{s_{\overline{n}|}} + r.$$

Rozważmy teraz rosnącą rentę terminową z parametrami q i m (np. $m = 12$, $q = 4$).

Czas				Płatność
0	$\frac{1}{m}$	$\dots$	$\frac{1}{q} - \frac{1}{m}$	$\frac{1}{mq}$
$\frac{1}{q}$	$\frac{1}{q} + \frac{1}{m}$	$\dots$	$\frac{2}{q} - \frac{1}{m}$	$\frac{2}{mq}$
$\frac{2}{q}$	$\frac{2}{q} + \frac{1}{m}$	$\dots$	$\frac{3}{q} - \frac{1}{m}$	$\frac{3}{mq}$
$\frac{3}{q}$	$\frac{3}{q} + \frac{1}{m}$	$\dots$	$\frac{4}{q} - \frac{1}{m}$	$\frac{4}{mq}$
....				$\dots$
$n - \frac{1}{q}$	$n - \frac{1}{q} + \frac{1}{m}$	$\dots$	$n - \frac{1}{m}$	$\frac{n}{m}$

Taka rosnąca renta terminowa może być traktowana jako rosnąca renta wieczysta rozpoczynająca się w chwili 0 minus rosnąca renta wieczysta rozpoczynająca się w chwili n, minus stała renta (w wysokości $\frac{n}{m}$) rozpoczynająca się w chwili n. Zatem [2]

$$\begin{aligned}(I^{(q)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} &= (I^{(q)}\ddot{a})_{\overline{\infty}|}^{(m)} - \upsilon^n (I^{(q)}\ddot{a})_{\overline{\infty}|}^{(m)} - \upsilon^n n \ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)} = \\ &= \frac{1}{d^{(m)}d^{(q)}} - \upsilon^n \frac{1}{d^{(m)}d^{(q)}} - \upsilon^n n \frac{1}{d^{(m)}} = \\ &= \frac{1}{d^{(m)}}\left(\frac{1 - \upsilon^n}{d^{(q)}} - \upsilon^n n\right) = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(q)} - n\upsilon^n}{d^{(m)}}.\end{aligned}$$

Analogicznie:

$$(I^{(q)}a)_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(q)} - n\upsilon^n}{r^{(m)}}.$$

Ważnymi szczególnymi przypadkami są:
— $m = q = 1$,
— $m = 12$, $q = 1$,
— $m = q = 12$,
— $m = \infty$, $q = 1$,
— $m = q = \infty$,

Renty terminowe rozważane wyżej są to tzw. standardowe renty rosnące (I). Standardowe renty malejące (D) są podobnie skonstruowane, ale płatności są w odwrotnej kolejności. Zatem sumy obu tych rent tworzą stałą rentę terminową (wysokość miesięczna płatności to $\frac{n}{m} + \frac{1}{mq}$). Zatem

$$(I^{(q)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} + (D^{(q)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} = (n + \frac{1}{q})\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}$$

[2] W następującym rachunku $\ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)}$ jest wartością renty w wysokości $\frac{1}{m}$, więc $n\ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)}$ jest wartością renty w wysokości $\frac{n}{m}$

skąd

$$\begin{aligned}
(D^{(q)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} &= (n+\frac{1}{q})\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} - \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(q)} - n\upsilon^n}{d^{(m)}} = \\
&= (n+\frac{1}{q})\frac{1-\upsilon^n}{d^{(m)}} - \frac{\frac{1-\upsilon^n}{d^{(q)}} - n\upsilon^n}{d^{(m)}} = \\
&= \frac{1}{d^{(m)}}\left[n - n\upsilon^n + \frac{1}{q} - \frac{1}{q}\upsilon^n - \frac{1-\upsilon^n}{d^{(q)}} + n\upsilon^n\right] = \\
&= \frac{1}{d^{(m)}}\left[n - (1-\upsilon^n)(\frac{1}{q} - \frac{1}{d^{(q)}})\right],
\end{aligned}$$

ale

$$\frac{1}{d^{(q)}} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r^{(q)}},$$

więc

$$(D^{(q)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{d^{(m)}}\left(n - \frac{1-\upsilon^n}{r^{(q)}}\right) = \frac{n - a_{\overline{n}|}^{(q)}}{d^{(m)}}.$$

Wzór ten, czyli wartość teraźniejszą standardowej renty malejącej można wyznaczyć także bezpośrednio, traktując tę rentę jako stałą rentę wieczystą z płatnościami $\frac{n}{m}$ minus nq odroczonych rent wieczystych, każda z płatnością $\frac{1}{mq}$, zaczynających się w momentach $\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, n$. Zatem

$$\begin{aligned}
(D^{(q)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} &= n\ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)} - \sum_{i=1}^{nq} \upsilon^{\frac{i}{q}} \frac{1}{q}\ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)} = \\
&= \ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)}\left[n - \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{nq}\upsilon^{\frac{i}{q}}\right] = \\
&= \frac{1}{d^{(m)}}\left[n - \frac{1}{q}\upsilon^{\frac{1}{q}}\frac{1-\upsilon^n}{1-\upsilon^{\frac{1}{q}}}\right] = \\
&= \frac{1}{d^{(m)}}\left[n - \frac{1-\upsilon^n}{q(\upsilon^{-\frac{1}{q}}-1)}\right],
\end{aligned}$$

ale ponieważ $(1+\frac{r^{(q)}}{q})^q = \upsilon^{-1}$, tj. $r^{(q)} = q(\upsilon^{-\frac{1}{q}}-1)$, więc

$$(D^{(q)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{d^{(m)}}\left[n - \frac{1-\upsilon^n}{r^{(q)}}\right] = \frac{n - a_{\overline{n}|}^{(q)}}{d^{(m)}}.$$

Przykłady

1. 40-letni robotnik chce zgromadzić fundusz na emeryturę. W tym celu odkłada w banku 1000 zł na początku każdego roku, przez 25 lat. Po przejściu na emeryturę planuje wykorzystać ten fundusz wybierając jednakowe kwoty na początku każdego roku przez 15 lat. W jakiej wysokości będą te kwoty jeśli efektywna roczna stopa procentowa wynosi 8% przez pierwsze 25 lat, a później 7%?

2. Jedna renta wypłaca kwoty 4 na koniec roku przez 36 lat. Druga — kwoty 5 na koniec roku przez 18 lat. Wartość teraźniejsza obu rent jest taka sama, przy stopie i. Znajdź n takie, że kapitał zainwestowany na n lat podwoi swoją wartość przy stopie i.

3. Załóżmy, że K i M zarabiają 3000 brutto. Na fundusz emerytalny pracodawca wpłaca 9,76% tej kwoty. Obliczyć wartość przyszłą konta emerytalnego dla K po 40 latach i M po 45 latach. Traktując obliczone wielkości jako wartości teraźniejsze rent wypłacanych: w przypadku K przez 20 lat, w przypadku M przez 10 lat obliczyć wysokość (miesięczną) takiej renty. Stopa roczna $r = 4\%$. Wpłaty i wypłaty z dołu, kapitalizacja miesięczna.

Rozwiązanie:

Wpłata miesięczna wynosi $3000 \cdot 0,0976 = 292,8$. Ponieważ kapitalizacja jest miesięczna, najlepiej stosować wzór na $s_{\overline{n}|}$, gdzie n jest liczbą miesięcy, a r jest stopą miesięczną $r_m = \frac{0,04}{12}$. Zatem podstawiamy do wzoru:

$$s_{\overline{n}|} = \frac{(1+r)^n - 1}{r},$$

i otrzymujemy wartość przyszłą konta emerytalnego dla K po 40 latach:

$$292,8 s_{\overline{480}|} = \frac{(1+\frac{0,04}{12})^{480} - 1}{\frac{0,04}{12}} = 339959,47.$$

Alternatywnie, gdyby stosować wzór:

$$s_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{(1+r)^n - 1}{r^{(m)}},$$

w którym n jest liczbą lat, to trzeba pamiętać, że w tym wzorze r jest stopą efektywną. Zatem r nie jest równe $0,04$, lecz $r = r_{ef}$, gdzie $1+r_{ef} = (1+\frac{0,04}{12})^{12}$. Natomiast $r^{(m)} = 0,04$.

Emeryturę (miesięczną) obliczamy dla K z równości

$$292,8 \cdot s_{\overline{480}|} = x \cdot a_{\overline{240}|},$$

a dla M z równości

$$292,8 \cdot s_{\overline{540}|} = x \cdot a_{\overline{120}|}.$$

Wyniki dla różnych stóp procentowych:

Stopa r	Kap.:K	Kap.:M	Emeryt.:K	Emeryt.:M
0,02	214 166	254 909	1 081	2 343
0,03	268 553	330 236	1 483	3 183
0,04	3399 59	432 989	2 047	4 369
0,05	434 083	573 868	2 838	6 055
0,06	558 568	767 835	3 950	8 463
0,07	723 667	1 035 827	5 517	11 912

4. Rozważmy rentę (z dołu) o czasie trwania n, której płatności tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy d, a pierwsza płatność wynosi A. Stopa procentowa jest równa r. Wykazać, że wartość przyszła wynosi

$$F = A s_{\overline{n}|} + \frac{d}{r}(s_{\overline{n}|} - n).$$

Rozwiązanie: Ponieważ k-ta płatność wynosi $P_k = A + (k-1)d$, więc rentę można traktować jako sumę rent stałych, o wspólnym momencie końcowym:

$$F = A s_{\overline{n}|} + d(s_{\overline{n-1}|} + s_{\overline{n-2}|} + \cdots + s_{\overline{1}|}).$$

Ale

$$\sum_{j=1}^{n-1} s_{\overline{j}|} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(1+r)^j - 1}{r} = \frac{1}{r}\Big(\sum_{j=0}^{n-1}(1+r)^j - n\Big) = \frac{1}{r}(s_{\overline{n}|} - n),$$

skąd otrzymujemy wynik.

Zadania z egzaminów dla aktuariuszy

1.(12.01.02 zad.2) Rozważmy 31-letnią rentę pewną natychmiast płatną o płatnościach dokonywanych na początku każdego roku. Niech r_k dla $k = 1, 2, \ldots, 31$ oznacza płatność na początku roku k i niech r_k będzie zdefiniowane następująco:

$$\begin{cases} r_1 & = \alpha \\ r_{k+1} & = (\frac{31}{k} - 1) r_k \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, 30 \end{cases}$$

Wiadomo, że wartość obecna tej renty (tzn. wartość tej renty w chwili dokonania pierwszej wypłaty) wynosi 2 048 366 (z dokładnością do liczb całkowitych). Wiadomo też że czynnik dyskontujący wynosi $v = 0,7$. Oblicz α.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość): 0,125; 0,250; 0,375; 0,500; 0,625.

Rozwiązanie.

Zauważmy,że $r_2 = 30\alpha$, $r_3 = (\frac{31}{2} - 1)30\alpha$,...; ogólnie

$$r_{k+1} = \binom{30}{k}\alpha.$$

Zatem wartość obecna

$$\sum_{k=1}^{31} r_k v^{k-1} = \sum_{k=0}^{30} r_{k+1} v^k = \sum_{k=0}^{30} \binom{30}{k}\alpha v^k = \alpha \sum_{k=0}^{30} \binom{30}{k} v^k = \alpha(1+v)^{30}.$$

Stąd $2048366 = \alpha \cdot 1,7^{30}$, więc $\alpha = 0,25$.

2.(17.06.00 zad.4) Dane są renty ciągłe, w których wysokość płatności w chwili t wynosi t zaś natężenie oprocentowania zależne jest od długości okresu wypłacania renty i wynosi $\frac{1}{n}$. Wyznacz ile razy obecna wartość renty wypłacanej przez okres 3 lat jest większa od obecnej wartości wypłacanej przez okres 2 lat. Odpowiedź: 1,50 razy ; 2,25 razy; 3,00 razy; 3,75 razy; żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa

Rozwiązanie.

$$a_{\overline{3}|} = \int_0^3 te^{-\frac{1}{3}t}dt, \quad a_{\overline{2}|} = \int_0^2 te^{-\frac{1}{2}t}dt$$

W $a_{\overline{3}|}$ podstawiamy $t = \frac{3}{2}u$:

$$a_{\overline{3}|} = \int_0^2 \frac{3}{2}ue^{-\frac{1}{2}u}\frac{3}{2}du = \frac{9}{4}a_{\overline{2}|}.$$

Zatem

$$\frac{a_{\overline{3}|}}{a_{\overline{2}|}} = \frac{9}{4} = 2,25.$$

3.(17.06.00 zad.9) Oblicz wartość końcową miesięcznej renty o wysokości kwartałami stałej po upływie 15 miesięcy wiedząc, że wysokość rat wzrośnie w kolejnych kwartałach o 4%. Na początku renta wynosi 150 zł. Miesięczna stopa procentowa wynosi 2%. Odpowiedź (podaj najbliższą wartość): 2785; 2795; 2805; 2815; 2825.

Rozwiązanie. Niech $r = 150, q = 1,02, p = 1,04$. Wartość przyszła (zakładamy, że renta jest płatna z dołu):

$$\begin{aligned}
X &= rq^{14} + rq^{13} + rq^{12} + rp(q^{11} + q^{10} + q^9) + \\
&+ rp^2(q^8 + q^7 + q^6) + rp^3(q^5 + q^4 + q^3) + rp^4(q^2 + q + 1) = \\
&= r\frac{q^3 - 1}{0,02}[q^{12} + pq^9 + p^2q^6 + p^3q^3 + p^4] = \\
&= r\frac{q^3 - 1}{0,02}q^{12}\frac{1 - (\frac{p}{q^3})^5}{1 - \frac{p}{q^3}} = \\
&= 150\frac{1,02^3 - 1}{1,02}1,02^{12}\frac{1 - (\frac{1,04}{1,02^3})^5}{1 - (\frac{1,04}{1,02^3})} = 2797
\end{aligned}$$

4.(17.06.00 zad.10) Dane są dwie renty wieczyste A i B, gdzie 1) renta A - w wysokości 1 płatna na koniec każdego roku, 2) renta B - w wysokości 1 płatna na koniec co drugiego roku. Różnica pomiędzy obecną wartością renty A, wyznaczoną przy stopie technicznej i, a obecną wartością renty B wyznaczoną również przy stopie technicznej i, wynosi $\sqrt{2}$. Wyznacz stopę techniczną i. Odpowiedź (podaj najbliższą wartość): 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5.

Rozwiązanie. Wartość obecna renty A wynosi $\frac{1}{i}$, zaś renty B:

$$v^2 + v^4 + \cdots = \frac{v^2}{1-v^2} = \frac{1}{v^{-2}(1-v^2)} = \frac{1}{v^{-2}-1} = \frac{1}{(1+i)^2-1} = \frac{1}{i^2+2i}.$$

Stąd

$$\frac{1}{i} - \frac{1}{i(i+2)} = \sqrt{2},$$

więc $i+1 = \sqrt{2}i(i+2)$, czyli $\sqrt{2}i^2 + (2\sqrt{2}-1)i - 1 = 0$, skąd $i_1 = \frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} < 0$, $i_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1 \approx 0,4$.