1 Portfele polis

Ponieważ składka jest ustalana jako wartość oczekiwana rzeczywistego, losowego kosztu ubezpieczenia, więc jest tym bliższa średniej wydatków im większa jest liczba ubezpieczonych. Polisy grupuje się więc w tzw. *portfele*. Suma składek wpływających do portfela powinna wystarczyć na wypłaty odszkodowań.

Przykład 1. Rozważmy portfel 50 polis na dożycie, z czasem trwania 5 lat, dla 40-latków. Każda polisa jest na sumę 10 000 zł i od każdej pobierana jest składka

$$10000A_{40:\overset{1}{\overline{5|}}}.$$

Te składki tworzą fundusz portfela. Zakładamy, że nie ma żadnych innych kosztów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że fundusz zbankrutuje, tzn. że nie wystarczy na pokrycie zobowiązań?

Na początku mamy

$$500000A_{40:\overset{1}{\overline{5|}}} = 500000v^5{}_5p_{40},$$

a po akumulacji

$$(1+r)^5 500000A_{40:\overset{1}{\overline{5|}}} = 500000{}_5p_{40}.$$

Całkowita wypłata jest zmienną losową. Niech $T_1, T_2, \ldots, T_{50}$ będą przyszłymi czasami życia osób ubezpieczonych w tym portfelu. Zakładamy, że te zmienne są niezależne. Niech $X_k = \mathbf{1}(T_k \geqslant 5)$. Wtedy całkowita wypłata wynosi

$$10000 \cdot \sum_{k=1}^{50} X_k,$$

i niewypłacalność pojawi się, gdy

$$10000 \cdot \sum_{k=1}^{50} X_k > 500000{}_5p_{40}.$$

Prawdopodobieństwo tego zdarzenia wynosi

$$\Pr\left(10000 \cdot \sum_{k=1}^{50} X_k > 500000{}_5p_{40}\right) = \Pr\left(\frac{\sum_{k=1}^{50} X_k - 50{}_5p_{40}}{\sqrt{50{}_5p_{40}{}_5q_{40}}} > 0\right)$$

Zmienna $\sum_{k=1}^{50} X_k$ ma rozkład Bernoullego z parametrami $n = 50$, $p = {}_5p_{40}$. Ponieważ prawdopodobieństwo ${}_5p_{40}$ obliczone na podstawie publikacji GUS *Trwanie życia w 2009r.* wynosi 0,98010 dla mężczyzn i 0,99332 dla kobiet, więc $np = \lambda$ jest zbyt duże, aby przybliżać ten rozkład rozkładem Poissona. Zatem w celu oszacowania prawdopodobieństwa powołamy się na centralne twierdzenie graniczne.

Twierdzenie 1 (Moivre'a-Laplace'a) *Jeśli $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie zero-jedynkowym, tzn.* $\Pr(X_k = 1) = p$, $\Pr(X_k = 0) = 1 - p = q$, *to*

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - np}{\sqrt{npq}} \leqslant u\right) = \Phi(u),$$

gdzie $\Phi(u)$ *jest dystrybuantą rozkładu normalnego.*

Zatem

$$\Pr\Big(10000 \cdot \sum_{k=1}^{50} X_k > 500000{}_5p_{40}\Big) \approx 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

Ten przykład pokazuje, że składka netto to zbyt mało, aby zapewnić wysokie prawdopodobieństwo realizacji zobowiązań. Stuprocentowe bezpieczeństwo zapewniłaby kwota 500 000, ale składki jej nie zapewnią. Postawimy sobie skromniejszy cel: wyliczymy kwotę h_0 jaką należy mieć w chwili $t = 0$ aby z prawdopodobieństwem 0,95 zaspokoić wszystkie roszczenia ubezpieczonych.
Poszukamy rozwiązania w postaci $h_0 = 50 \cdot C(1+\epsilon)A_{40:\overset{1}{\overline{5|}}}$, gdzie $C = 10000$ jest sumą ubezpieczenia. Liczba ϵ to tzw. *współczynnik względnego narzutu bezpieczeństwa* (relative safety loading), nazywany też *współczynnikiem narzutu na ryzyko.*
Pytamy więc o minimalną wartość h_0, dla której

$$\Pr\Big(\sum_{k=1}^{50} CX_k \leqslant h_0\Big) \geqslant 0,95.$$

Zastosujemy przybliżenie wynikające z centralnego twierdzenia granicznego.

Twierdzenie 2 (centralne twierdzenie graniczne) *Jeśli* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z wartością oczekiwaną* $\mathrm{E}(X_k) = m$ *i wariancją* $\mathrm{Var}(X_k) = \sigma^2$ *, to*

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\Big(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant u\Big) = \Phi(u),$$

gdzie $\Phi(u)$ *jest dystrybuantą rozkładu normalnego.*

Obliczamy:

$$\begin{aligned}
\Pr\Big(\sum_{k=1}^{50} CX_k \leqslant h_0\Big) &= \Pr\Big(\sum_{k=1}^{50} CX_k \leqslant 50 \cdot C(1+\epsilon)A_{40:\overset{1}{\overline{5|}}}\Big) = \\
&= \Pr\Big(\sum_{k=1}^{50} \big(X_k - A_{40:\overset{1}{\overline{5|}}}\big) \leqslant 50\epsilon A_{40:\overset{1}{\overline{5|}}}\Big) = \\
&= \Pr\left(\sum_{k=1}^{50} \frac{X_k - A_{40:\overset{1}{\overline{5|}}}}{\sqrt{50\,\mathrm{Var}(X_1)}} \leqslant \frac{50\epsilon A_{40:\overset{1}{\overline{5|}}}}{\sqrt{50\,\mathrm{Var}(X_1)}}\right) \approx \\
&\approx \Phi\left(\frac{\sqrt{50}\epsilon A_{40:\overset{1}{\overline{5|}}}}{\sqrt{{}^2A_{40:\overset{1}{\overline{5|}}} - (A_{40:\overset{1}{\overline{5|}}})^2}}\right)
\end{aligned}$$

Ma być

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{50}\epsilon A_{40:\overset{1}{\overline{5|}}}}{\sqrt{{}^2A_{40:\overset{1}{\overline{5|}}} - (A_{40:\overset{1}{\overline{5|}}})^2}}\right) \geqslant 0{,}95 = \Phi(1{,}645),$$

czyli

$$\frac{\sqrt{50}\epsilon A_{40:\overline{5}|}^{\ 1}}{\sqrt{{}^2A_{40:\overline{5}|}^{\ 1} - (A_{40:\overline{5}|}^{\ 1})^2}} \geqslant 1{,}645.$$

Zatem najmniejszą liczbę ϵ wyznaczymy z równania

$$\epsilon = \frac{1{,}645\sqrt{{}^2A_{40:\overline{5}|}^{\ 1} - (A_{40:\overline{5}|}^{\ 1})^2}}{\sqrt{50}A_{40:\overline{5}|}^{\ 1}}$$

Ponieważ $A_{40:\overline{5}|}^{\ 1} = v^5{}_5p_{40}$, więc

$$\epsilon = \frac{1,645}{\sqrt{50}}\sqrt{\frac{1}{{}_5p_{40}} - 1}.$$

Podstawiając prawdopodobieństwo ${}_5p_{40}$ (0,98010 dla mężczyzn i 0,99332 dla kobiet) obliczamy ϵ .
Dla mężczyzn $\epsilon \approx 0,0331$, a dla kobiet $\epsilon \approx 0,0191$. Oznacza to, że jeśli będzie się pobierać składkę o 3,31% większą (dla mężczyzn) bądź o 1,91% większą (dla kobiet), to z prawdopodobieństwem 0,95 nie nastąpi ruina tego portfela.
Przykład 2. Portfel n polis na życie w wysokości C płatnych na koniec roku śmierci, dla 40-latek. Niech $Z_1, Z_2, \ldots$ oznaczają znormalizowane (tzn. w wysokości 1) wartości obecne tych polis. Zakładamy, że zmienne Z_k są niezależne. Pytamy, ile musi wynosić $h_0 = n \cdot C(1+\epsilon)A_{40}$, by

$$\Pr\Big(\sum_{k=1}^{n} CZ_k \leqslant h_0\Big) \geqslant 0,95.$$

Ponieważ znalezienie rozkładu $\sum_{k=1}^{n} Z_k$ jest trudne, nawet przy jakimś analitycznym prawie śmiertelności, zastosujemy przybliżenie wynikające z centralnego twierdzenia granicznego.

Twierdzenie 3 (centralne twierdzenie graniczne) *Jeśli* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie z wartością oczekiwaną* $\mathrm{E}(X_k) = m$ *i wariancją* $\mathrm{Var}(X_k) = \sigma^2$ *, to*

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\Big(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant u\Big) = \Phi(u),$$

gdzie $\Phi(u)$ *jest dystrybuantą rozkładu normalnego.*

Obliczamy

$$\begin{aligned}
\Pr\Big(\sum_{k=1}^{n} CZ_k \leqslant h_0\Big) &= \Pr\Big(\sum_{k=1}^{n} CZ_k \leqslant n\cdot C(1+\epsilon)A_{40}\Big) = \\
&= \Pr\Big(\sum_{k=1}^{n}\big(Z_k - A_{40}\big) \leqslant n\epsilon A_{40}\Big) = \\
&= \Pr\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{Z_k - A_{40}}{\sqrt{n\operatorname{Var}(Z_1)}} \leqslant \frac{n\epsilon A_{40}}{\sqrt{n\operatorname{Var}(Z_1)}}\right) \approx \\
&\approx \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\epsilon A_{40}}{\sqrt{{}^2A_{40} - (A_{40})^2}}\right)
\end{aligned}$$

Analogicznie jak w Przykładzie 1 ma być

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\epsilon A_{40}}{\sqrt{{}^2A_{40} - (A_{40})^2}}\right) \geqslant \Phi(1,645),$$

$$\frac{\sqrt{n}\epsilon A_{40}}{\sqrt{{}^2A_{40} - (A_{40})^2}} \geqslant 1,645$$

Zatem najmniejszą liczbę ϵ wyznaczymy z równania

$$\epsilon = \frac{1,645\sqrt{{}^2A_{40} - (A_{40})^2}}{\sqrt{n}A_{40}}$$

Ponieważ $A_{40} = \sum_{k=0}^{\infty} \upsilon^{k+1}{}_kp_{40}q_{40+k}$, więc wykorzystując tablice trwania życia dla kobiet i przyjmując techniczna stopę procentową $r = 5\%$ znajdujemy przy pomocy arkusza kalkulacyjnego $A_{40} = 0{,}150819$, ${}^2A_{40} = 0{,}04046$ i obliczamy

$$\epsilon = \frac{1,645}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{0{,}017713}}{0{,}150819} = \frac{1{,}451638}{\sqrt{n}}.$$

Liczba ϵ zależy, jak widać, od n. Zatem

$$h_0 = nC\Big(1 + \frac{1{,}451638}{\sqrt{n}}\Big)\cdot 0{,}150819.$$

Np. dla $n = 100$ mamy $h_0 = 17,27125C$, a dla $n = 1000$ mamy $h_0 = 157,7423C$.

Można też wyrazić wartość $W(t)$ tego portfela w chwili t. Przypuśćmy, że kolejne chwile śmierci osób z tego portfela to

$$T^{(1)} < T^{(2)} < \cdots < T^{(n)}.$$

Wtedy

$$W(t) = \begin{cases} h_0e^{\delta t} & 0 \leqslant t < T^{(1)} \\ \big(h_0e^{\delta t} - C\big)e^{\delta(t-T^{(1)})} & T^{(1)} \leqslant t < T^{2)} \\ \big(\big(h_0e^{\delta t} - C\big)e^{\delta(T^{(2)}-T^{(1)})} - C\big) & T^{(1)}T^{(2)} \leqslant t < T^{(3)} \\ \cdots & \end{cases}$$

Oczywiście ważne są tylko te momenty śmierci, które nastąpią w czasie trwania ubezpieczenia.

2 Składki brutto

Bieżące koszty, jakie ponosi firma ubezpieczeniowa to

- koszty akwizycji
- koszty pobierania składki
- koszty administracyjne (zarządzania polisą)

Koszty akwizycji są związane z wystawieniem nowej polisy (reklama, prowizja agenta, koszty agenta (np. przejazdy), koszty badań medycznych, itp.) Zakładamy, że są one proporcjonalne do sumy ubezpieczenia. Współczynnik proporcjonalności oznaczamy przez α.
Koszty pobierania składki są ponoszone tylko w latach, w których jest pobierana składka. Zakładamy, że są one proporcjonalne do składki brutto. Współczynnik proporcjonalności oznaczamy przez β.
Koszty administracyjne to wszystkie pozostałe, a więc wynagrodzenia pracowników, czynsze lub koszty obsługi własnych budynków, koszty usług telekomunikacyjnych i informatycznych, podatki, itp. Te koszty są pobierane w całym okresie ważności polisy. Zakładamy, że są one proporcjonalne do sumy ubezpieczenia. Współczynnik proporcjonalności oznaczamy przez γ.
Składką brutto (expense-loaded premium) nazywamy poziom składki P^{br} taki, który przeciętnie zapewni pokrycie przyszłych wypłat z tytułu ubezpieczenia i i wszystkich w.w. kosztów. Zatem

$$P^{br} = P + P^{\alpha} + P^{\beta} + P^{\gamma},$$

gdzie P jest składką netto, a pozostałe składniki dotyczą kosztów.
Np. składka brutto dla ubezpieczenia na życie i dożycie spełnia na mocy powyższych ustaleń równanie

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} P^{br}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \beta P^{br}_{x:\overline{n}|} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

Stąd możemy wyznaczyć

$$P^{br}_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \gamma \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{(1-\beta)\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}.$$