1. Miara łukowa kąta.

Definicja 1 *Niech będzie dany dowolny kąt. Z jego wierzchołka zataczamy okrąg o dowolnym promieniu r. Niech l oznacza łuk będący częścią wspólną tego okręgu i obszaru danego kąta. Stosunek długości tego łuku do promienia nazywamy* łukową miarą kąta*. Zatem*

$$\text{łukowa miara kąta } = \frac{l}{r}.$$

Zauważmy, że przy zmianie promienia r zmienia się proporcjonalnie łuk l, zatem stosunek jest zawsze taki sam.
Jeżeli łukowa miara kąta jest równa 1, to kąt nazywamy *radianem.* Inaczej, radian jest miarą kąta w którym łuk jest równy promieniowi.
Przykłady 1. Miarą łukową kąta pełnego jest 2π, bo łuk zatoczony promieniem r ma wtedy długość $2\pi r$.
2. Kąt półpełny ma miarę π.
Każdy nieco lepszy kalkulator pozwala na przeliczenie miary łukowej na stopniową, i odwrotnie. Zasada zamiany jednej miary na drugą jest prosta. Jeśli miarę łukową danego kąta oznaczymy przez φ, a kątową φ°, to zachodzi proporcja

$$\varphi : \pi = \varphi^\circ : 180^\circ,$$

czyli

$$\varphi^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \varphi$$

oraz

$$\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \varphi^\circ.$$

Przykłady 1. Jaka jest miara łukowa kąta 43°?

$$\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 43^\circ = 0,7505.$$

2. Wyrazić 1 radian w stopniach.

$$\varphi^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot 1 = 57,2958^\circ.$$

Cyfry po przecinku oznaczają $\frac{2958}{10000}^\circ$.
Zwykle stopień dzielimy na minuty, a te — na sekundy. Zatem

$$1 \text{ radian} = 57^\circ 17' 45''$$

Poniższa tabelka pokazuje miary łukowe kątów podanych w stopniach.

Stopnie	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Radiany	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Od tej pory przyjmujemy, że funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej to **funkcje łukowej miary kąta**.
Kąt skierowany to uporządkowana para półprostych o wspólnym początku.
Miarą kąta skierowanego jest miara obrotu, w wyniku którego ramię początkowe nakłada się na ramię końcowe. Gdy obrót jest wykonywany przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, to miara kąta jest dodatnia; jeżeli zgodnie — to ujemna. Kąt ma wiele miar. Są one postaci

$$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi, \quad 0 \leqslant \varphi_0 < 2\pi$$

gdzie φ_0 nazywamy miarą główną.

2. Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych.

Definicja 2 *Niech $x \in \mathbb{R}$. Sinusem liczby x nazywamy sinus kąta skierowanego, którego miarą łukową jest x.*

Analogicznie określamy pozostałe funkcje trygonometryczne.
Znane własności funkcji trygonometrycznych należy teraz wysłowić inaczej. Oto przykłady.
Okresem podstawowym funkcji $\sin x$ jest liczba 2π. Zatem $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ dla dowolnej liczby całkowitej k. Analogicznie jest dla cosinusa.
Okresem podstawowym funkcji $\operatorname{tg} x$ jest liczba π. Zatem $\operatorname{tg}(x+k\pi) = \operatorname{tg} x$ dla dowolnej liczby całkowitej k. Analogicznie jest dla cotangensa.
Funkcje $\sin x$ i $\cos x$ są określone w przedziale $(-\infty, +\infty)$.
Funkcja $\operatorname{tg} x$ jest określona w każdym przedziale postaci $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, gdzie $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.
Funkcja $\operatorname{ctg} x$ jest określona w każdym przedziale postaci $(k\pi, (k+1)\pi)$, gdzie $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.
Zadanie. Naszkicować wykresy:
a) $y = -\sin 2x$
b) $y = \cos x + |\cos x|$
c) $y = \frac{|\cos x|}{\cos x}$
d) $y = 2\sin x|\cos x|$

3. Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta.

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}$$

1. Wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$ i $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ obliczyć $\sin\alpha$, i $\cos\alpha$.
2. Wiedząc, że $\cos x = \frac{23}{45}$ i $x \in (\pi, 2\pi)$ obliczyć $\sin x$.
3. Wiadomo, że $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 6$. Obliczyć a) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$; b) $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$.
4. Wiadomo, że $\sin\alpha + \cos\alpha = c$. Obliczyć a) $2\sin\alpha\cos\alpha$; b) $\sin\alpha - \cos\alpha$.
5. Uprościć wyrażenia
a) $\sqrt{\sin^2\alpha(1 + \operatorname{ctg}\alpha) + \cos^2\alpha(1 + \operatorname{tg}\alpha)}$;
b) $\sin\alpha - \sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha}$, jeżeli $\pi < \alpha < 2\pi$.
c) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}$

4. Funkcje sinus i cosinus podwojonego kąta.

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha}$$

5. Wzory redukcyjne

Wzory redukcyjne służą do redukowania argumentu funkcji do I ćwiartki. Ponieważ funkcje trygonometryczne są okresowe, więc wystarczy umieć zredukować kąty dla okresu podstawowego. Aby zredukować kąt należy go przedstawić w postaci $k \cdot 90° + \alpha$ lub $k \cdot 90° - \alpha$ (gdy używamy miary stopniowej), lub w postaci $k \cdot \frac{\pi}{2} + \alpha$ lub $k \cdot \frac{\pi}{2} - \alpha$ (gdy używamy miary łukowej).

Poniższa tabelka zawiera wartości funkcji trygonometrycznych, które **należy znać na pamięć**. Symbol X oznacza, że wartość nie istnieje.

Kąt	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	X
$\operatorname{ctg} x$	X	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Wartości funkcji trygonometrycznych dla innych kątów znajdujemy korzystając z *wzorów redukcyjnych*. Oto niektóre z nich.
$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$
$\sin(\pi - x) = \sin x$
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{ctg} x$
Ogólne zasady są takie: jeżeli we wzorze występuje kąt $\frac{\pi}{2}$ lub $\frac{3\pi}{2}$, to funkcja zmienia się na kofunkcję; jeżeli we wzorze występuje kąt π lub 2π, to funkcja pozostaje bez zmian. Natomiast znak po prawej stronie ustalamy posługując się wiedzą o znakach funkcji w poszczególnych ćwiartkach (każdy powinien znać wierszyk: *w pierwszej wszystkie są dodatnie, w drugiej tylko sinus, w trzeciej tanges i cotangens, a w czwartej cosinus*).

6. Proste równania i nierówności trygonometryczne.
Równania elementarne:
$\sin x = a \implies x = x_0 + 2k\pi$ lub $x = \pi - x_0 + 2k\pi$, gdzie $x_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\cos x = a \implies x = x_0 + 2k\pi$ lub $x = -x_0 + 2k\pi$, gdzie $x_0 \in [0, \pi]$
$\tan x = a \implies x = x_0 + k\pi$, gdzie $x_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\operatorname{ctg} x = a \implies x = x_0 + k\pi$, gdzie $x_0 \in (0, \pi)$

Schematy logiczne: *metoda równań równoważnych* i *metoda analizy starożytnych.*

1. $\sin x + \cos x = 1$

2. $\sin^2 x = \sin x$

3. $4\sin^2 x + \sin^2 2x = 3$

4. $|\sin x| > \frac{\sqrt{3}}{2}$

5. $\cos^2 x < \frac{1}{2}$

6. $\sin x > \cos x$

7. $\cos x + \operatorname{tg} x < 1 + \sin x$, $0 < x < 2\pi$

8. $2\sin^2 3x + \sin^2 5x < 2$

9. $|\sin 3x| - |\cos 3x| = 1$

10. $\operatorname{ctg} x - \cos x = \frac{1-\sin x}{2\sin x}$

11. $2^{\sin^x} = 1 + 2^{\cos^2 x}$

12. $\log_{\sin x} \frac{4}{3} = -2$